Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Benjamin Mehanna

Dortmund, 20. Mai 2014

Lineare dynamische Systeme

6. Übungsblatt, SoSe 2014

1) Es seien $C^\infty(\mathbb{R})$ der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (siehe Blatt 5, Aufgabe 3) und $D\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ mit $Df = f'$ der reelle Differentiationsoperator. Zeigen Sie, dass D hyperzyklisch ist indem Sie eine geeignete Quasikonjugation $\phi\colon H(\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ definieren.

2) Es seien (w_n) eine Folge in $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ und $B_w\colon \omega \to \omega$ definiert durch

$$B_w(x_1, x_2, x_3, \dots) := (w_2x_2, w_3x_3, w_4x_4, \dots)\,.$$

Man nennt B_w auch einen *gewichteten Rückwärtsshift* auf ω. Zeigen Sie, dass B_w ein hyperzyklischer Operator ist.

3) Es seien X ein Banachraum und $T\colon X \to X$ ein Operator. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   a) T hängt empfindlich von den Anfangsbedingungen ab.

   b) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \|T^n\| = \infty$.

   c) Es existiert ein $x \in X$, dessen Orbit unter T unbeschränkt ist.

   Hinweis: Benutzen Sie das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit: Sind X, Y Banachräume, $\Gamma \subset L(X,Y)$ eine Menge von Operatoren mit $\sup\limits_{T\in\Gamma} \|Tx\| < \infty$ für alle $x \in X$, so gilt $\sup\limits_{T\in\Gamma} \|T\| < \infty$.