Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Benjamin Mehanna

Dortmund, 13. Mai 2014

Lineare dynamische Systeme

5. Übungsblatt, SoSe 2014

1) Es sei X ein reeller oder komplexer Vektorraum und (p_n) eine monoton wachsende und punktetrennende Folge von Halbnormen auf X. Zeigen Sie, dass durch

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, p_n(x-y)\}, \quad x, y \in X$$

tatsächlich eine Metrik auf X definiert wird.

2) Es sei X ein Fréchetraum. Zeigen Sie, dass dann auch $X^{\mathbb{N}}$ (der Raum aller Folgen mit Einträgen aus X) in natürlicher Weise ein Fréchetraum ist. Zeigen Sie weiterhin, dass $X^{\mathbb{N}}$ separabel ist, falls X separabel ist.

3) Es sei $C^\infty(\mathbb{R})$ der Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ und

$$p_n(f) := \max_{k=0,1,\dots,n} \max_{|x| \le n} |f^{(k)}(x)|, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}), \ n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass (p_n) eine monoton wachsende und punktetrennende Folge von Halbnormen auf $C^\infty(\mathbb{R})$ ist und damit $C^\infty(\mathbb{R})$ ein separabler Fréchetraum ist.

Hinweis: Benutzen Sie zum Nachweis der Separabilität von $C^\infty(\mathbb{R})$ den Weierstraßschen Approximationssatz um $f^{(n)}$ auf dem Intervall $[-n, n]$ durch Polynome zu approximieren.

4) Es sei X ein Fréchetraum mit zugehöriger Folge (p_n) von Halbnormen und p eine beliebige Halbnorm auf X. Zeigen Sie, dass p stetig ist genau dann, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $M > 0$ gibt mit

$$p(x) \le M p_n(x), \quad x \in X.$$

Zeigen Sie weiterhin, dass diese Aussage sofort den nichttrivialen Teil von Satz 2.1.11 impliziert.