Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Benjamin Mehanna

Dortmund, 29. April 2014

Lineare dynamische Systeme

3. Übungsblatt, SoSe 2014

1) Betrachten Sie das dynamische System $T\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit $Tx := \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$. Zeigen Sie, dass ein $q \in (0,1)$ existiert mit $|Tx - Ty| \leq q|x-y|$ für alle $x, y \geq 1$. Zeigen Sie anschließend die Ungleichung

$$\left|T^n x - \sqrt{2}\,\right| \leq q^n \left|x - \sqrt{2}\,\right|$$

und hiermit $T^n x \to \sqrt{2}$ $(n \to \infty)$ für alle $x \geq 1$.

2) Es sei X ein metrischer Raum und $T\colon X \to X$ ein topologisch transitives dynamisches System. Zeigen Sie, dass die Rückwärtsmenge $N(U,V)$ für jedes Paar von nichtleeren offenen Mengen U, $V \subset X$ unendlich ist.

Hinweis: Zeigen Sie für $m \in N(U,V)$ und $W := U \cap T^{-m}(V)$, dass

$$N(W,W) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset \quad \text{und} \quad m + N(W,W) \subset N(U,V)$$

gilt.

3) Es sei X ein metrischer Raum ohne isolierte Punkte und $T\colon X \to X$ ein dynamisches System. Für $x \in X$ sei $J_T(x) = J(x)$ definiert als die Menge aller $y \in X$ mit der Eigenschaft, dass eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen (n_k) und eine Folge (x_k) in X existiert so, dass $x_k \to x$ $(k \to \infty)$ und $T^{n_k} x_k \to y$ $(k \to \infty)$ gilt. Zeigen Sie:

(i) Es ist $J(x)$ abgeschlossen.

(ii) Es gilt $J(x) = X$ für ein $x \in X$ genau dann, wenn zu jedem Paar U, $V \subset X$ nichtleerer offener Mengen mit $x \in U$, ein $n \in \mathbb{N}_0$ existiert so, dass $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ gilt.