Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Benjamin Mehanna

Dortmund, 15. April 2014

# Lineare dynamische Systeme

2. Übungsblatt, SoSe 2014

1) Es sei $X$ ein metrischer Raum und $T\colon X \to X$ ein topologisch transitives dynamisches System. Zeigen Sie:

   a) Die Bildmenge $T(X)$ ist dicht in $X$.

   b) Für jede nichtleere offene Menge $V \subset X$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Urbildmenge $T^{-n}(V)$ offen und nicht leer.

2) Es sei $X$ ein separabler, vollständiger metrischer Raum ohne isolierte Punkte und $T\colon X \to X$ ein topologisch transitives dynamisches System. Zeigen Sie konstruktiv, d.h. ohne Benutzung des Baireschen Kategoriesatzes, dass es eine in $X$ dichte Menge $Y$ gibt so, dass jedes $x \in Y$ einen dichten Orbit in $X$ hat.

   *Hinweis*: Wählen Sie eine Folge $(y_n)$, die dicht in $X$ liegt. Starten Sie mit einem $x_0 \in X$ und finden Sie ein $x_1 \in X$ nahe an $x_0$ und ein $m_1 \in \mathbb{N}$ so, dass $T^{m_1}x_1$ nahe an $y_1$ ist. Finden Sie dann ein $x_2 \in X$ nahe an $x_1$ und ein $m_2 \in \mathbb{N}$ so, dass $T^{m_1}x_2$ nahe an $T^{m_1}x_1$ und $T^{m_1+m_2}x_2$ nahe an $y_2$ ist.

3) Es sei $X$ ein metrischer Raum ohne isolierte Punkte und $T\colon X \to X$ ein dynamisches System. Ein *Rückwärtsorbit* eines Elementes $x \in X$ ist eine Folge $(x_n)$ mit $x_0 = x$ und $Tx_n = x_{n-1}$ (bzw. $x_n \in T^{-1}(x_{n-1})$). Man beachte, dass ein Rückwärtsorbit nicht existieren muss und er nicht eindeutig bestimmt ist.

   Beweisen Sie folgende Aussagen:

   a) Ist $X$ separabel und vollständig und $T$ topologisch transitiv, so gibt es eine in $X$ dichte Menge $Y$ so, dass für jedes $x \in Y$ ein dichter Rückwärtsorbit existiert.

   b) Falls ein $x \in X$ mit einem dichten Rückwärtsorbit existiert, so ist $T$ topologisch transitiv.

4) Es sei $T$ eine irrationale Rotation auf der Einheitskreislinie $\mathbb{T}$, d.h. $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass der Orbit jedes Punktes $z \in \mathbb{T}$ dicht in $\mathbb{T}$ ist.

   *Hinweis*: Benutzen Sie das Schubfachprinzip, um zu zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Bogen der Länge $\varepsilon$ gibt, der zwei Iterierte $T^m 1$ und $T^n 1$ von 1 mit $m > n$ enthält und betrachten Sie dann die Iterierten von $T^{m-n}1$.

   Das Schubfachprinzip besagt Folgendes: Hat man $m$ Schubfächer und $n > m$ Objekte, die man in die Schubfächer verteilen will, so muss man in ein Schubfach mindestens zwei Objekte legen.