Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Analysis III für Lehramt

1. Klausur, WiSe 2012/13

Bearbeitungszeit: 3 Stunden

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $K \subset \mathbb{R}^2$ der Viertelkreis um $(0,0)$ mit Radius 1, der im ersten Quadranten liegt und die Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,y) := xy$. Berechnen Sie den Flächeninhalt σ des Graphen G_f von f.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antworten:

a) Ist die Folge (I_n) mit
$$I_n := \int_0^1 x^{2n} \sin nx \, dx$$
konvergent und gegebenenfalls gegen welchen Wert?

b) Es sei $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ messbar und es gelte $|f(x)| \leq \frac{1}{x}$ für alle $x \in [1,\infty)$. Ist dann f Lebesgue-integrierbar auf $[1,\infty)$?

c) Es sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ messbar und es gelte $|f(x)| \leq e^{-x}$ für alle $x \in [0,\infty)$. Ist dann f Lebesgue-integrierbar auf $[0,\infty)$?

Aufgabe 3 (9 Punkte)

a) Es sei $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld definiert durch

$$v(x,y) := (xy, ye^x)^\top$$

und Γ der geschlossene Polygonzug durch die Punkte $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$ und $(0,0)$. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma \langle v(x), dx\rangle \,.$$

b) Es sei $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld definiert durch

$$v(x,y,z) := (x^2 + 5y + 3yz, 5x + 3xz - 2, 3xy - 4z)^\top$$

und Γ die Kurve mit der Parameterdarstellung $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Prüfen Sie, ob v ein Potential besitzt und bestimmen Sie gegebenenfalls ein solches. Berechnen Sie dann das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma \langle v(x), dx\rangle \,.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $v\colon D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und für je zwei stückweise glatte Kurven Γ_1, Γ_2 in D mit gleichen Anfangs- und Endpunkten gelte

$$\int_{\Gamma_1} \langle v(x), dx\rangle = \int_{\Gamma_2} \langle v(x), dx\rangle \,.$$

Zeigen Sie, dass v ein Potential $\phi\colon D \to \mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

a) Es sei Γ der Dreiecksweg von 0 nach 1 nach i nach 0. Berechnen sie die komplexen Kurvenintegrale

$$\int_\Gamma \operatorname{Re} z\, dz\,, \qquad \int_\Gamma \operatorname{Im} z\, dz\,, \qquad \int_\Gamma z\, dz\,.$$

b) Es sei Γ ein stückweise glatter Weg mit Anfangspunkt $-\pi i$ und Endpunkt πi. Berechnen sie die komplexen Kurvenintegrale

$$\int_\Gamma z^4\, dz\,, \qquad \int_\Gamma e^z\, dz\,.$$

c) Berechnen Sie die komplexen Kurvenintegrale

$$\int_{|z|=2} \frac{z^n}{z-1}\, dz \quad (n \in \mathbb{N}_0)\,, \qquad \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^m}\, dz \quad (m \in \mathbb{Z})\,.$$

Aufgabe 6 (5 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Bildmenge des Parallelstreifens $S = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4} \right\}$ unter der Funktion $f(z) = e^{2z}$. Ist f injektiv in S?

b) Bestimmen Sie die Bildmenge des ersten Quadranten $Q = \{ z = x+iy \in \mathbb{C} : x, y > 0 \}$ unter der Funktion $g(z) = z^3$. Ist g injektiv in Q?

Aufgabe 7 (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f mit der Eigenschaft $f^{(k)}(1) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

b) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f mit der Eigenschaft $f^{(k)}(0) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

c) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f mit der Eigenschaft $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y' = (x+y)^2 , \quad y(0) = 1 .$$

Lösen Sie das Anfangswertproblem indem Sie in der obigen Differentialgleichung $u = x+y$ substituieren. Geben Sie das maximale Lösungsintervall an.

Aufgabe 9 (7 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(*) \qquad y' = e^{-x}y^2 + y - e^x , \quad y(0) = y_0 .$$

a) Bestimmen Sie die Lösung von $(*)$ für $y_0 = 1$ durch Raten.

b) Zur Bestimmung der Lösung von $(*)$ für $y_0 \neq 1$ substituieren Sie $y(x) = e^x + \dfrac{1}{u(x)}$, leiten Sie eine Differentialgleichung für u her und lösen Sie diese.

Aufgabe 10 (5 Punkte)

Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 .$$

mit stetigen Funktionen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Welche Aussage gilt über die Lösungsmenge dieser Differentialgleichung? Beweisen Sie diese Aussage.