9.6 Satz über implizite Funktionen

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten dann die Niveaumenge $N_c := \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c \,\}$. Die Frage ist nun: Wie sehen diese Mengen aus? Unter welchen Voraussetzungen sind dies Wege (Kurven) bzw. kann man sie (zumindest lokal) als Graph einer reellwertigen Funktion einer Variablen interpretieren. Anders ausgedrückt: Kann man die Gleichung $g(x, y) := f(x, y) - c = 0$ nach y auflösen? Wir betrachten zunächst ein Beispiel.

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := x^2 + y^2 - 1$. Ist $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_0 \in (-1, 1)$, $y_0 > 0$ und erfüllt (x_0, y_0) die Gleichung $f(x, y) = 0$, so gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $\varphi\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$ und $f(x, \varphi(x)) = 0$ für alle $x \in (-1, 1)$, nämlich $\varphi(x) := \sqrt{1 - x^2}$. Eine entsprechende Aussage gilt für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_0 \in (-1, 1)$ und $y_0 < 0$. Hier ist $\varphi(x) := -\sqrt{1 - x^2}$. Ist jedoch z.B. $x_0 = 1$ und $y_0 = 0$, so gibt es keine solche Funktion φ. In diesem Fall kann man die Gleichung $f(x,y)=0$ aber nach x auflösen, d.h. es gibt eine eindeutig bestimmte Funktion $\psi\colon (-1,1)\to\mathbb{R}$ mit $\varphi(y_0)=x_0$ und $f(\psi(y),y)=0$ für alle $y\in(-1,1)$, nämlich $\psi(y):=\sqrt{1-y^2}$.

Satz 9.6.1 (Satz über implizite Funktionen)**.** *Es sei $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f\in C^1(D)$ und $(a,b)=(a_1,\dots,a_n,b)\in D$ mit $f(a,b)=0$ und $\partial_{n+1}f(a,b)\neq 0$. Dann gibt es einen offenen Würfel V mit Mittelpunkt a in $\mathbb{R}^n$ und ein offenes Intervall I mit Mittelpunkt b in $\mathbb{R}$ mit $V\times I\subset D$, sodass für jedes $x\in V$ die Gleichung $f(x,y)=0$ in I genau eine Lösung y besitzt. Die dadurch definierte Funktion $g\colon V\to I$ erfüllt $g(a)=b$, es ist $g\in C^1(V)$ und für $j=1,\dots,n$ gilt*

$$(*)\qquad \partial_{x_j}g(x)=-\frac{\partial_{x_j}f(x,g(x))}{\partial_y f(x,g(x))}\,,\quad x\in V\,.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass $\partial_y f(a,b)>0$ (sonst betrachtet man die Funktion $-f$). Da D offen und $\partial_y f$ stetig auf D ist, gibt es ein $\delta>0$ und $b_1,\ b_2\in\mathbb{R}$ mit $b_1<b<b_2$, $R:=\overline{U}_\delta(a)\times[b_1,b_2]\subset D$ und $\partial_y f(x,y)>0$ für alle $(x,y)\in R$. Für jedes $x\in\overline{U}_\delta(a)$ ist die partielle Funktion $f_x\colon[b_1,b_2]\to\mathbb{R}$ mit $f_x(y)=f(x,y)$ streng monoton wachsend und daher gilt $f(a,b_1)<0=f(a,b)<f(a,b_2)$. Da f stetig auf D ist, gibt es einen offenen Würfel $V\subset\overline{U}_\delta(a)$ mit Mittelpunkt a, sodass $f(x,b_1)<0<f(x,b_2)$ für alle $x\in V$. Nach dem Zwischenwertsatz hat also die Gleichung $f(x,y)=0$ für $x\in V$ genau eine Lösung $y\in I:=(b_1,b_2)$. Hierdurch wird die gesuchte Funktion $g\colon V\to I$ definiert, und es gilt $g(a)=b$.

Wir zeigen jetzt, dass g stetig auf V ist. Dazu sei $x\in V$, $y=g(x)$ und $\varepsilon>0$ mit $[y-\varepsilon,y+\varepsilon]\subset I$. Wie oben findet man ein $\alpha>0$, sodass die Gleichung $f(\xi,\eta)=0$ für $\xi\in U_\alpha(x)$ genau eine Lösung $\eta\in(y-\varepsilon,y+\varepsilon)$ besitzt. Dann ist $\eta=g(\xi)$, und es gilt $|g(\xi)-g(x)|<\varepsilon$ für $|\xi-x|<\alpha$, d.h. g ist stetig in x.

Nun zeigen wir noch $g\in C^1(V)$ und Formel $(*)$. Dazu seien $j\in\{1,\dots,n\}$, $x\in V$ und $t\in\mathbb{R}$ mit $t\neq 0$ und $x+te_j\in V$. Wir setzen $k:=g(x+te_j)-g(x)\in\mathbb{R}$. Wegen $f(\xi,g(\xi))=0$ für $\xi\in V$ folgt mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung von Funktionen einer Variablen

$$f(x+te_j,y)=f(x+te_j,y)-f(x,y)=\partial_{x_j}f(x+\tau te_j,y)t$$

und

$$f(x+te_j,y) = f(x+te_j,y) - f(x+te_j,y+k) = -\partial_y f(x+te_j,y+\theta k)k\,,$$

wobei τ, $\theta \in (0,1)$. Hieraus folgt

$$\frac{g(x+te_j)-g(x)}{t} = \frac{k}{t} = -\frac{\partial_{x_j} f(x+\tau te_j,y)}{\partial_y f(x+te_j,y+\theta k)}\,.$$

Für $t \to 0$ gilt wegen der Stetigkeit von g auch $k \to 0$. Durch Grenzübergang $t \to 0$ folgt dann die Existenz von $\partial_{x_j}(x)$ und Formel $(*)$. Hieraus folgt dann schließlich noch die Stetigkeit von $\partial_{x_j} g$, da $f \in C^1(D)$. □

Wenn man bereits weiß, dass $g \in C^1(V)$ ist, so kann man die Formel $(*)$ durch so genanntes *implizites Differenzieren* herleiten. Aus der Gleichung $f(x,g(x)) = 0$ folgt nämlich mit Hilfe der Kettenregel

$$0 = \partial_{x_j} f(x,g(x)) + \partial_y f(x,g(x)) g_{x_j}(x)\,.$$

Aus Formel $(*)$ folgt auch induktiv, dass $g \in C^k(V)$ ist, sofern $f \in C^k(V)$. Hieraus kann man dann durch implizites Differenzieren auch höhere partielle Ableitungen berechnen. Im Fall $n = 1$ lautet $(*)$

$$g'(x) = -\frac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))}\,.$$

9.7 Extrema mit Nebenbedingungen

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := 2xy$ und die kompakte Menge $K = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 2\,\}$. Nach dem Satz vom Maximum und Minimum nimmt die Funktion f ihr Maximum und Minimum auf K an. Die Frage ist nun: Wie berechnet man diese Werte? Für die Extrema von f auf der Menge $K^\circ = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 2\,\}$ muss gelten $\operatorname{grad} f(x,y) = (2x,2y)^\top = (0,0)^\top$, also $(x,y) = (0,0)$. Aber offensichtlich hat f in $(0,0)$ kein Extremum. Also sind die Extrema von f auf der Menge

$$M = \partial K = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2 = 0\,\}$$

zu bestimmen, d.h. die Extrema von f unter der *Nebenbedingung*

$$g(x,y) := x^2+y^2-2 = 0\,.$$

Bei Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $n > 2$ kann man auch mehrere Nebenbedingungen (maximal $n-1$) stellen.

Satz 9.7.1 (Lagrange Multiplikatorenregel). *Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f \in C^1(D)$, $g = (g_1, \ldots, g_m)^\top \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ mit $m < n$, $S := \{\, x \in D : g(x) = 0 \,\}$, f habe in $a \in S$ ein lokales Extremum und* $\operatorname{Rang} g'(a) = m$. *Dann gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit*

$$\operatorname{grad} f(a) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \operatorname{grad} g_j(a)\,.$$

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall einer Nebenbedingung, d.h. $m = 1$. Dann ist $\operatorname{Rang} g'(a) = m$ äquivalent zu $\operatorname{grad} g(a) \neq 0$. Wir können also annehmen, dass $g_{x_n}(a) \neq 0$, denn sonst nummeriert man die Variablen entsprechend um. Wir definieren $\lambda \in \mathbb{R}$ durch

$$\lambda := \frac{f_{x_n}(a)}{g_{x_n}(a)}\,.$$

Für $a = (a_1, \ldots, a_n)$ gilt $g(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) = 0$ und daher können wir die Gleichung $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = 0$ nach dem Satz über implizite Funktionen lokal nach y auflösen. Es gibt also ein $r > 0$, ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $a_n \in I$ und eine eindeutig bestimmte Funktion $h\colon V := U_r(a_1, \ldots, a_{n-1}) \to I$ mit $h(a_1, \ldots, a_{n-1}) = a_n$ und $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1})) = 0$ für $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in V$. Weiter gilt für $j = 1, \ldots, n-1$

$$g_{x_j}(a) + g_{x_n}(a) h_{x_j}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0\,.$$

Wir definieren nun $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) := f(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1}))\,.$$

Da f in $a \in S$ ein lokales Extremum besitzt, hat φ in $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in V$ ein lokales Extremum. Also gilt für $j = 1, \ldots, n-1$

$$\varphi_{x_j}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0\,.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
\varphi_{x_j}(a_1, \ldots, a_{n-1}) &= f_{x_j} f(a) + f_{x_n}(a) h_{x_j}(a_1, \ldots, a_{n-1}) \\
&= f_{x_j}(a) + \lambda g_{x_n}(a) h_{x_j}(a_1, \ldots, a_{n-1}) \\
&= f_{x_j}(a) - \lambda g_{x_j}(a)\,.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt also $f_{x_j}(a) = \lambda g_{x_j}(a)$ für $j = 1, \ldots, n$ und damit die Behauptung. □

Die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ aus dem obigen Satz heißen *Lagrange-Multiplikatoren*.

Beispiel 9.7.2. Wir behandeln das Beispiel vom Beginn dieses Abschnitts, d.h. wir suchen die Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 2xy$ auf der Menge $M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2 = 0 \}$, d.h. unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$. Für $(x,y) \in M$ ist $\operatorname{grad} g(x,y) = (2x, 2y)^\top \neq 0$. Ist (x,y) eine Extremalstelle, so gibt es nach dem obigen Satz ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$2y = 2\lambda x\,, \tag{1}$$

$$2x = 2\lambda y\,, \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 = 2\,. \tag{3}$$

Ist in (1) oder (2) $x = 0$, so auch $y = 0$, was (3) widerspricht. Also gilt $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $\lambda \neq 0$. Dividiert man (1) durch (2), so folgt $x^2 = y^2$ und daher mit (3) $x^2 = 1$, also $x = \pm 1$. Insgesamt gibt es also vier mögliche Extremalstellen, nämlich $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ und $(-1,-1)$. Wegen $f(1,1) = f(-1,-1) = 2$ und $f(1,-1) = f(-1,1) = -2$ folgt $\max\limits_{x \in M} f(x,y) = 2$ und $\min\limits_{x \in M} f(x,y) = -2$.

9.8 Länge von Wegen

Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. Wir wollen nun die Länge von γ berechnen. Dazu müssen wir zuerst definieren, was wir unter der Länge von γ verstehen.

Es sei $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $x_k := \gamma(t_k)$ für $k = 0, 1, \dots, m$. Dann setzen wir

$$L_Z(\gamma) := \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|\,.$$

Es ist $L_Z(\gamma)$ die Länge des Polygonzuges durch $x_0, x_1, \dots, x_m$. Ist Z' eine Verfeinerung von Z, so gilt offenbar $L_{Z'}(\gamma) \geq L_Z(\gamma)$. Der Weg γ heißt *rektifizierbar*, wenn

$$L(\gamma) := \sup \{ L_Z(\gamma) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b] \} < \infty\,.$$

In diesem Fall heißt $L(\gamma)$ die *Länge* des Weges γ.

Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist ihr Graph G_f ein Weg in $\mathbb{R}^2$, denn definieren wir $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ durch $\gamma(t) := (t, f(t))^\top$, so ist $\gamma([a,b]) = G_f$.

Nun betrachten wir so genannte *glatte Wege* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, d.h. γ ist stetig differenzierbar auf $[a,b]$ und $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Insbesondere ist der Graph einer auf $[a,b]$ stetig differenzierbaren Funktion ein glatter Weg. Wir wollen jetzt zeigen, dass ein glatter Weg rektifizierbar ist und eine Formel zur Berechnung seiner Länge herleiten. Dazu benötigen wir noch folgenden Satz über Integrale.

Satz 9.8.1. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ mit $\|Z\| < \delta$ gilt*

$$0 \le \int_a^b f(x)\,dx - U_Z(f) < \varepsilon\,, \quad 0 \le O_Z(f) - \int_a^b f(x)\,dx < \varepsilon\,.$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung nur für Untersummen. Es sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig auf $[a,b]$ ist, ist f auch gleichmäßig stetig auf $[a,b]$. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle $x,\ x' \in [a,b]$ mit $|x - x'| < \delta$. Nun sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit $\|Z\| < \delta$. Setzen wir $m_k := \min\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$, so gibt es ein $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ mit $m_k = f(\xi_k)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
0 \le \int_a^b f(x)\,dx - U_Z(f) &= \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) \\
&= \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(\xi_k))\,dx \\
&\le \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(\xi_k)|\,dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n (x_{k-1} - x_k) = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

□

Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Für $k = 1, \ldots, n$ wählen wir einen *Zwischenpunkt* $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ und setzen

$$R_Z(f, \xi) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\,.$$

Dann heißt $R_Z(f,\xi)$ eine *Riemannsche Zwischensumme* oder kurz *Riemannsumme*. Offensichtlich gilt

$$U_Z(f) \le R_Z(f,\xi) \le O_Z(f)$$

für jede Wahl von Zwischenpunkten. Aus Satz 9.8.1 erhalten wir sofort

Satz 9.8.2. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ mit $\|Z\| < \delta$ und jede Wahl von Zwischenpunkten gilt*

$$\left| R_Z(f,\xi) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon\,.$$

Diese beiden Ergebnisse gelten auch unter der Voraussetzung, dass f nur integrierbar auf $[a,b]$ ist, aber dann ist der Beweis komplizierter und technisch aufwändiger.

Satz 9.8.3. *Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein glatter Weg. Dann ist γ rektifizierbar, und für die Länge von γ gilt*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n |\gamma_j'(t)|^2}\,dt\,.$$

Beweis. Wir zeigen:

(∗) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ mit $\|Z\| < \delta$ gilt

$$\left| L_Z(\gamma) - \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt \right| < \varepsilon\,.$$

Hieraus folgt dann für $L_Z(\gamma) \le \int_a^b \|x'(t)\|\,dt$ für jede Zerlegung Z von $[a,b]$, da für jede Verfeinerung Z' von Z gilt $L_{Z'}(\gamma) \ge L_Z(\gamma)$. Dies bedeutet dann, dass γ rektifizierbar ist. Weiter folgt aus (∗) $\sup\limits_Z L_Z(\gamma) = \int_a^b \|x'(t)\|\,dt$ und damit die Behauptung.

Es sei $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann gilt mit $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^\top$

$$\begin{aligned} L_Z(\gamma) &= \sum_{k=1}^m \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^m \sqrt{\sum_{j=1}^n |\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1})|^2} \\ &= \sum_{k=1}^m \sqrt{\sum_{j=1}^n |\gamma_j'(\tau_{jk})(t_k - t_{k-1})|^2} = \sum_{k=1}^m \sqrt{\sum_{j=1}^n |\gamma_j'(\tau_{jk})|^2}\,(t_k - t_{k-1})\,. \end{aligned}$$

Hier haben wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung angewandt, und es ist $\tau_{jk} \in [t_{k-1}, t_k]$.

Dies ist leider keine Riemannsumme für das Integral

$$I_\gamma := \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt\,.$$

Daher approximieren wir $L_Z(\gamma)$ durch eine geeignete Riemannsumme. Dazu setzen wir

$$R_Z(\gamma) := \sum_{k=1}^{m} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j'(t_k)|^2}\,(t_k - t_{k-1})\,.$$

Dann folgt aus der Dreiecksungleichung (bzw. $|\|x\|_2 - \|y\|_2| \le \|x-y\|_2$)

$$|L_Z(\gamma) - R_Z(\gamma)| = \sum_{k=1}^{m} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j'(\tau_{jk}) - \gamma_j'(t_k)|^2}\,(t_k - t_{k-1}))\,.$$

Nun sei $\varepsilon > 0$. Da $\gamma_1', \dots, \gamma_n'$ stetig auf $[a,b]$ sind, sind sie auch gleichmäßig stetig auf $[a,b]$, d.h. es gibt ein $\delta > 0$ mit $|\gamma_j'(t) - \gamma_j'(t')| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}\,(b-a)}$ für alle $t, t' \in [a,b]$ mit $|t-t'| < \delta$ und $j = 1, \dots, n$. Ist nun Z eine Zerlegung von $[a,b]$ mit $\|Z\| < \delta$, so gilt $|\tau_{jk} - t_k| < \delta$ für $j = 1, \dots, n$ und $k = 1, \dots, m$ und daher

$$(**) \qquad |L_Z(\gamma) - R_Z(\gamma)| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Nach Satz 9.8.2 können wir δ noch so klein wählen, dass für alle Zerlegungen Z von $[a,b]$ mit $\|Z\| < \delta$ gilt

$$(***) \qquad \left| R_Z(\gamma) - \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Aus $(**)$, $(***)$ und der Dreiecksungleichung ergibt sich nun die Behauptung $(*)$. □

Folgerung 9.8.4. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar auf $[a,b]$. Dann ist der Graph G_f von f rektifizierbar, und für seine Länge gilt*

$$L(G_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx\,.$$

Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$. Dann folgt

$$L(G_f) = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{4}\left(\operatorname{arsinh} 2 + 2\sqrt{5}\right).$$

Abschließend geben wir noch ein Beispiel für einen nicht-rektifizierbaren Weg an. Dazu betrachten wir die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x \cos\frac{\pi}{x}$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 0$ und zeigen, dass G_f nicht rektifizierbar ist. Dazu wählen wir eine Zerlegung $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ von $[0,1]$ mit $t_0 := 0$ und $t_k := \frac{1}{m-k+1}$ für $k = 1, \dots, m$. Dann folgt für $m \ge 2$

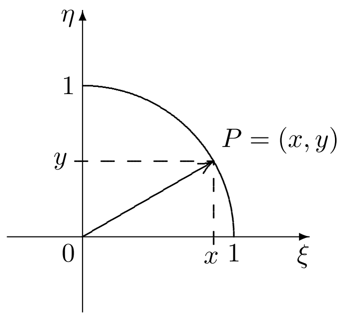
$$L_Z(G_f) = \sum_{k=1}^{m} \|(t_k, f(t_k)) - (t_{k-1}, f(t_{k-1}))\| \ge \sum_{k=2}^{m} \|(t_k, f(t_k)) - (t_{k-1}, f(t_{k-1}))\|$$

$$= \sum_{k=2}^{m} \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + (t_k + t_{k-1})^2} \geq \sum_{k=2}^{m} t_k = \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{m-k+1}$$

$$= \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j} \to \infty \quad (m \to \infty)\,.$$

9.9 Bogenlänge und trigonometrische Funktionen

In Abschnitt 4.1 hatten wir die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus mittels der Bogenlänge eingeführt. Dieser Begriff war damals noch nicht mathematisch sauber definiert, was wir jetzt nachholen wollen. Wir betrachten dazu folgende Skizze.



Für $x \in (0,1]$ und $y \in [0,1)$ können wir den Kreisbogen S_P zwischen den Punkten $(1,0)$ und $P = (x,y)$ als Graph einer Funktion $\xi = g(\eta) = \sqrt{1-\eta^2}$ auffassen, d.h.

$$S_P = \{\, (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \eta \in [0,y]\,,\ \xi = \sqrt{1-\eta^2}\,\}\,.$$

Es ist $g \in C^1([0,y])$ und daher gilt nach Folgerung 9.8.4 für die Länge s von S_P

$$s = a(y) := \int_0^y \sqrt{1 + (g'(\eta))^2}\, d\eta = \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\,.$$

Hierdurch wird dann eine Funktion $a\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ definiert. Für $y < 0$ interpretieren wir die Länge s als negativ und daher kann man die Funktion a auf das Intervall $(-1,1)$ fortsetzen, sodass eine ungerade Funktion entsteht. Diese auf $(-1,1)$ definierte Funktion nennen wir Arcussinus und bezeichnen sie mit arcsin, d.h. $\arcsin y := a(y)$ für $y \in (-1,1)$. Offenbar gilt $a \in C^\infty(-1,1)$ mit $a'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, und a ist streng monoton wachsend. Wegen $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-y}}$ und $\int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-y}} = 2$ existiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-y^2}}$, d.h. es existiert der Grenzwert

$$L := \lim_{y \to 1} a(y) = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$

Diese Zahl interpretieren wir als die Länge einer Viertelkreislinie. Wir definieren nun die *Kreiszahl* π durch

$$\pi := 2L = 2 \lim_{y \to 1} a(y) = 2 \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-y^2}} \,.$$

Es ist also π die Länge einer Halbkreislinie. Wegen $\sqrt{2} \le L \le 2$ folgt $2\sqrt{2} \le \pi \le 4$. Daher können wir die Funktion *arcsin* auf das Intervall $[-1,1]$ stetig fortsetzen. Sie ist dort streng monoton wachsend und die Bildmenge ist das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Für $0 < y < 1$ ergibt sich mit partieller Integration

$$\begin{aligned} a(y) &= \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \int_0^y \frac{1-\eta^2+\eta^2}{\sqrt{1-\eta^2}}\, d\eta = \int_0^y \sqrt{1-\eta^2}\, d\eta + \int_0^y \eta \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\, d\eta \\ &= \int_0^y \sqrt{1-\eta^2}\, d\eta - \eta\sqrt{1-\eta^2}\Big|_0^y + \int_0^y \sqrt{1-\eta^2}\, d\eta \\ &= 2\int_0^y \sqrt{1-\eta^2}\, d\eta - y\sqrt{1-y^2} = 2A(y)\,, \end{aligned}$$

wobei $A(y)$ der Flächeninhalt des Kreissektors mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und P ist. Daher ist π der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius 1.

Nach den obigen Überlegungen besitzt die Funktion $\arcsin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ eine Umkehrfunktion. Diese nennen wir Sinus, d.h. $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$. Weiterhin definieren wir den Cosinus $\cos\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ durch

$$\cos s := \sqrt{1-\sin^2 s}\,.$$

Offensichtlich ist sin eine ungerade und cos eine gerade Funktion. Aus der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion (Satz 4.2.11) erhalten wir, dass sin auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ differenzierbar ist und $\sin' x = \cos x$. Man zeigt leicht, dass sin auch in $\pm\frac{\pi}{2}$ differenzierbar ist mit $\sin'\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$, d.h. $\sin' x = \cos x$ gilt auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Jetzt setzen wir sin und cos auf das Intervall $[-\pi, \pi]$ fort, indem wir definieren

$$\begin{aligned} \sin x &:= -\sin(x+\pi)\,, \quad \cos x := -\cos(x+\pi)\,, \quad x \in \left[-\pi, -\tfrac{\pi}{2}\right]\,, \\ \sin x &:= -\sin(x-\pi)\,, \quad \cos x := -\cos(x-\pi)\,, \quad x \in \left[\tfrac{\pi}{2}, \pi\right]\,. \end{aligned}$$

Schließlich setzen wir sin und cos noch so auf $\mathbb{R}$ fort, dass sie 2π-periodisch sind. Dann sind sin und cos differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $\sin' x = \cos x$ und $\cos' x = -\sin x$. Weiter folgt aus der Definition sofort

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

und $|\cos x| \leq 1$ und $|\sin x| \leq 1$. Aus der Definition der Funktion a folgt sofort $|a(y)| \geq |y|$ und hieraus die Abschätzung $|\sin x| \leq |x|$.

Es gelten nun die Additionstheoreme aus Satz 3.1.17. Wir beweisen exemplarisch

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \,.$$

Dazu setzen wir $z := x + y$ für feste x, $y \in \mathbb{R}$ und betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) := \cos t \cos(z-t) - \sin t \sin(z-t)\,.$$

Dann folgt

$$f'(t) := -\sin t \cos(z-t) + \cos t \sin(z-t) - \cos t \sin(z-t) + \sin t \cos(z-t) = 0\,.$$

Also gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $f(t) = c$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Setzen wir speziell $t = 0$ so folgt $f(t) = \cos(x+y)$. Die Behauptung ergibt sich nun für $t = x$.

Damit sind die Funktionen sin und cos mathematisch exakt definiert und alle weiteren Ergebnisse, die wir erzielt haben, ebenfalls exakt bewiesen.