Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 6. Dezember 2016

Komplexe dynamische Systeme

10. Übungsblatt, WiSe 2016/17

1) Es sei P ein Polynom vom Grad $d \geq 2$ und $f(z) := z - \frac{P(z)}{P'(z)}$ die zugehörige Newtonfunktion.

   a) Zeigen Sie: Es ist $\zeta \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P genau dann, wenn ζ ein Fixpunkt von f ist.

   b) Zeigen Sie: Ist $\zeta \in \mathbb{C}$ eine einfache Nullstelle von P, so ist ζ ein superattraktiver Fixpunkt von f und liefert ein Böttchergebiet $\mathscr{A}(\zeta)$ von f.

   c) Zeigen Sie: Ist $\zeta \in \mathbb{C}$ eine m-fache Nullstelle von P mit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, so ist ζ ein attraktiver Fixpunkt von f und liefert ein Schrödergebiet $\mathscr{A}(\zeta)$ von f. Bestimmen Sie den Multiplikator $\lambda(\zeta)$.

   d) Zeigen Sie, dass ∞ ein abstoßender Fixpunkt von f ist und damit $\infty \in \mathscr{J}(f)$ gilt.

   e) Diskutieren Sie speziell die Beispiele $P_d(z) := z^d - 1$ mit $d \geq 2$. Kann man etwas über die Zusammenhangszahl der zugehörigen Böttchergebiete sagen.

   f) Welche Resultate ergeben sich, wenn man das Polynom P durch eine rationale Funktion R vom Grad $d \geq 2$ ersetzt?

2) a) Es sei $R(z) := z^2$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{D}$ ein einfach zusammenhängendes Böttchergebiet von R ist.

   b) Es sei $R(z) := z\,\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ mit $0 < |a| < 1$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{D}$ ein einfach zusammenhängendes Schrödergebiet von R ist.

   c) Es sei $R(z) := z^2 - 6$. Zeigen Sie, dass $\mathscr{J}(R)$ eine Cantormenge, also total unzusammenhängend ist. Folgern Sie hieraus, dass R ein unendlichfach zusammenhängendes Böttchergebiet besitzt.

   d) Es sei $R(z) := 2z - \frac{1}{z}$. Zeigen Sie, dass R ein unendlichfach zusammenhängendes Schrödergebiet besitzt. Zeigen Sie dazu, dass ∞ ein attraktiver Fixpunkt ist und betrachten Sie den reellen Graphen von R auf dem Intervall $[-1, 1]$.

3) Es sei R eine rationale Funktion und U ein stabiles Gebiet von R. Weiterhin gebe es eine Teilfolge (R^{n_k}) von (R^n), sodass (R^{n_k}) in U lokal gleichmäßig gegen eine nichtkonstante Grenzfunktion konvergiert. Zeigen Sie, dass $\mathscr{F}(R)$ unendlich viele stabile Gebiete enthält.