Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 13. Juli 2016

Komplexe dynamische Systeme

7. Übungsblatt, SoSe 2016

1) a) Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, U eine Umgebung von z_0, f eine in U holomorphe Funktion, z_0 ein Fixpunkt von f und $f(U) \subset U$. Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung $V \subset U$ von z_0 mit $f^n \to z_0$ $(n \to \infty)$ lokal gleichmäßig in V genau dann, wenn z_0 attraktiv ist.

   b) Es sei f eine ganze Funktion und U ein mehrfach zusammenhängendes stabiles Gebiet von f. Zeigen Sie $f^n \to \infty$ $(n \to \infty)$ lokal gleichmäßig in U.

2) Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, f holomorph in $U_r(z_0)$ und z_0 sei ein Fixpunkt von f, d.h. für $z \in U_r(z_0)$ gilt $f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0) + \cdots$. Dann heißt $\iota_f(z_0) := \operatorname{Res}\left(\frac{1}{f(z)-z}, z_0\right)$ der Index des Fixpunktes z_0 von f. Für $z_0 = \infty$, also $f(z) = a_p z^p + \cdots + a_1 z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \cdots +$ mit $p \in \mathbb{N}$ setzt man $g(z) := \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}$ und $\iota_f(\infty) = \iota_g(0)$. Zeigen Sie:

   a) Ist $\lambda \neq 1$, so ist $\iota_f(z_0) = \frac{1}{1-\lambda}$.

   b) Ist $\lambda = 1$, d.h. $f(z) = z_0 + (z - z_0) + a_1(z - z_0)^{s+1} + a_2(z - z_0)^{s+2} + \cdots$ mit $s \in \mathbb{N}$ und $a_1 \neq 0$, so ist $\iota_f(z_0) = -\frac{a_2}{a_1^2}$.

   c) Es ist ι invariant gegenüber lokalen Konjugationen, d.h. ist $\phi(z) = z_0 + c_1(z - z_1) + \cdots$ holomorph in einer Umgebung von $z_1 \in \mathbb{C}$ und $c_1 \neq 0$ und ist $g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$, so ist $\iota_f(z_0) = \iota_g(z_1)$.

   d) Für jede rationale Funktion R vom Grad $d \geq 2$ gilt die holomorphe Fixpunktformel
   $$\sum_{R(z)=z} \iota_R(z) = 1\,.$$
   Hinweis: Nehmen Sie an, dass ∞ kein Fixpunkt von R ist und betrachten Sie das Integral
   $$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \left(\frac{1}{z - R(z)} - \frac{1}{z} \right) dz$$
   für $r > 0$ hinreichend groß.

3) Es sei $P(z) := z^2 - 1$, und für $\zeta \in \mathscr{F}$ sei $\mathscr{A}(\zeta)$ das stabile Gebiet, das ζ enthält. Zeigen Sie:

   a) P besitzt stabile Gebiete $\mathscr{A}(0)$, $\mathscr{A}(-1)$ und $\mathscr{A}(1)$ und diese sind paarweise disjunkt.

   b) P bildet $\mathscr{A}(-1)$ und $\mathscr{A}(1)$ konform auf $\mathscr{A}(0)$ ab.

   c) $P\colon \mathscr{A}(0) \to \mathscr{A}(-1)$ ist eine eigentliche Abbildung vom Abbildungsgrad $\deg P = 2$.

   d) P besitzt unendlich viele stabile Gebiete und alle sind einfach zusammenhängend.