Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 29. Juni 2016

Komplexe dynamische Systeme

6. Übungsblatt, SoSe 2016

1) Zeigen Sie, dass die Menge der quadratischen rationalen Funktionen

$$R(z) = \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}$$

bezüglich Konjugation in Äquivalenzklassen zerfällt und finden Sie geeignete (einfache) Repräsentanten.

Hinweis: Mit Hilfe von Konjugation kann man annehmen, dass R die Fixpunkte 0 und ∞ hat.

2) Bestimmen Sie alle kubischen Polynome der Form $P(z) = z - (z^2 - 1)(az + b)$, die die (super)attraktiven Fixpunkte ± 1 haben.

3) Es sei (f_n) eine Folge rationaler Funktionen, die gleichmäßig auf $\widehat{\mathbb{C}}$ gegen eine Grenzfunktion f konvergiert. Zeigen Sie, dass f rational ist und $\deg f = \deg f_n$ für alle hinreichend großen n.

4) Es sei $E_\lambda(z) := \lambda e^z$ mit $0 < \lambda < \frac{1}{e}$.

   a) Zeigen Sie durch Betrachtung des reellen Graphen von E_λ, dass E_λ einen anziehenden Fixpunkt $q_\lambda \in (0, 1)$ und einen abstoßenden Fixpunkt $p_\lambda \in (1, \infty)$ besitzt.

   b) Es sei $\mathscr{A}(q_\lambda)$ das stabile Gebiet von E_λ, das q_λ enthält. Zeigen Sie $E_\lambda^n \to q_\lambda$ $(n \to \infty)$ lokal gleichmäßig in $\mathscr{A}(q_\lambda)$ und $H_\lambda := \{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < p_\lambda \,\} \subset \mathscr{A}(q_\lambda)$.

   c) Zeigen Sie, dass $\mathscr{A}(q_\lambda)$ vollständig invariant ist.

   Welche Aussagen ergeben sich für $\lambda = \frac{1}{e}$?