Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 15. Juni 2016

Komplexe dynamische Systeme

5. Übungsblatt, SoSe 2016

1) a) Zeigen Sie, dass jede überabzählbare Menge $M \subset \mathbb{C}$ mindestens einen Häufungspunkt besitzt.

   b) Kann man die Aussage in (a) noch verschärfen?

   c) Eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt *perfekt*, wenn $M' = M$ gilt, wobei M' die Menge aller Häufungspunkte von M bezeichnet. Zeigen Sie, dass jede perfekte Menge $M \subset \mathbb{C}$ überabzählbar ist.

2) Es sei $f(z) := z + 1 + e^{-z}$. Zeigen Sie:

   a) Alle Fixpunkte von f sind abstoßend.

   b) Die Funktion f besitzt ein invariantes stabiles Gebiet U, das die rechte Halbebene $\mathbb{H} := \{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \,\}$, alle kritischen Punkte von f und alle Geraden der Form $L_k := \{\, x + 2k\pi i : x \in \mathbb{R} \,\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ enthält.

   c) Es gilt $f^n \to \infty$ $(n \to \infty)$ lokal gleichmäßig in U.

3) a) Konstruieren Sie ein Polynom $P(z) = z^3 + az + b$, sodass die zugehörige Newtonfunktion $R(z) := z - \frac{P(z)}{P'(z)}$ einen superattraktiven 2-Zyklus besitzt.

   b) Es sei $P_\lambda(z) := z^2 + \lambda z$ mit $|\lambda| < 1$. Zeigen Sie, dass P_λ zwei vollständig invariante stabile Gebiete besitzt.

   Hinweis: Sie können dazu folgendes Ergebnis, das später in der Vorlesung bewiesen wird, benutzen: Ist R eine rationale Funktion, $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ ein attraktiver Fixpunkt von R und $\mathscr{A}(z_0)$ das stabile Gebiet, das z_0 enthält, so enthält $\mathscr{A}(z_0)$ einen kritischen Punkt von R. Außerdem ist es nützlich, die Riemann-Hurwitz-Formel anzuwenden.

   c) Es sei $R_c(z) := z + \frac{1}{z} + c$ mit $\operatorname{Re} c > 0$. Zeigen Sie, dass R_c ein vollständig invariantes stabiles Gebiet besitzt, das die rechte Halbebene $\mathbb{H} := \{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \,\}$ enthält.