Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 31. Mai 2016

Komplexe dynamische Systeme

4. Übungsblatt, SoSe 2016

1) a) Zeigen Sie, dass jedes Polynom

$$P(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + a_{d-2} z^{d-2} + \cdots + a_1 z + a_0$$

mit $d \geq 2$ und $a_d \neq 0$ zu genau einem Polynom der Form

$$Q(z) = z^d + b_{d-2} z^{d-2} + \cdots + b_1 z + b_0$$

konjugiert ist, wobei die konjugierende Möbius-Transformation ganz-linear ist.

b) Zeigen Sie, dass jedes quadratische Polynom $P(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ mit $a_2 \neq 0$ zu genau einem Polynom der Form $P_c(z) = z^2 + c$ mit $c \in \mathbb{C}$ bzw. $Q_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ konjugiert ist. Wie hängen c und λ zusammen?

2) Es sei R eine rationale Funktion vom Grad $d \geq 2$. Zeigen Sie, dass R genau $2d - 2$ kritische Punkte besitzt, wobei die Vielfachheit zu berücksichtigen ist und ein m-facher Pol mit $m \geq 2$ nur $(m-1)$-fach gezählt wird.

3) Es sei $Q_\lambda(z) := \lambda z + z^2$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$.

a) Es sei $|\lambda| < 1$. Bestimmen Sie ein $r > 0$, sodass $Q_\lambda^n \to 0$ $(n \to \infty)$ lokal gleichmäßig in $U_r(0)$.

b) Es sei $\lambda = 1$. Bestimmen Sie ein $\varrho > 0$, sodass $U_\varrho(-\varrho) \subset \mathscr{F}(Q_\lambda)$.