

Komplexe dynamische Systeme

2. Übungsblatt, SoSe 2016

1) Es sei $P_c(z) := z^2 + c$ mit $c \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) Ist $|c| \leq 2$, so ist $\Delta_2 \cup \{\infty\} \subset \mathcal{A}(\infty)$.

b) Ist $c = -2$, so ist $\mathcal{F} = \mathcal{A}(\infty) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus [-2, 2]$ und $\mathcal{J} = [-2, 2]$.

c) Ist $c = -1$, so ist $U_r(0) \cup U_{r^2}(-1) \subset \mathcal{F}$, wobei $r^3 + 2r = 1$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $|P_c^2(z)| < r$ für $|z| < r$.

d) Ist $|1 - \sqrt{1 - 4c}| < 1$, so enthält die ausgefüllte Juliamenge von P_c innere Punkte.

2) Es sei P ein Polynom vom Grad $d \geq 2$. Zeigen Sie:

a) Ist U ein stabiles Gebiet von P mit $U \neq \mathcal{A}(\infty)$, so ist U einfach zusammenhängend.

b) P besitzt höchstens $d - 1$ attraktive Fixpunkte in \mathbb{C} .

Hinweis: Betrachten Sie dazu das Integral

$$I_R := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{dz}{P(z) - z}$$

für hinreichend große $R > 0$. Berechnen Sie I_R einerseits mit dem Residuensatz und zeigen Sie andererseits $I_R = 1$ mit dem Cauchyschen Integralsatz.

3) Es seien f und g meromorphe Funktionen. Zeigen Sie: Ist f oder g transzendent, so ist $f \circ g$ keine rationale Funktion.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von PICARD.