Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 19. April 2016

Komplexe dynamische Systeme

1. Übungsblatt, SoSe 2016

1) Es sei $P_c(z) := z^2 + c$ mit $c \in \mathbb{C}$, $c_n := P_c^n(0)$ für $n \in \mathbb{N}$ und

$$\alpha := \tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4c}\right), \quad \beta := \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1-4c}\right)$$

die Fixpunkte von P. Zeigen Sie:

a) Ist $c < -2$, so ist $c_n \geq 2 + n\,|c+2|$ für $n \geq 2$.

b) Ist $-2 \leq c < 0$, so bildet P_c das Intervall $[-\beta, \beta]$ in sich ab.

c) Ist $0 \leq c \leq \frac{1}{4}$, so bildet P_c das Intervall $[0, \alpha]$ in sich ab.

d) Ist $c > \frac{1}{4}$, so ist $c_n \geq n\left(c - \frac{1}{4}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Folgern Sie hieraus, dass $\mathscr{M} \cap \mathbb{R} = \left[-2, \frac{1}{4}\right]$, wobei $\mathscr{M}$ die Mandelbrotmenge ist. Zeigen Sie weiterhin, dass $i \in \mathscr{M}$.

2) Es sei $P_c(z) := z^2 + c$ mit $c \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie alle c, sodass P_c einen attraktiven 2-Zyklus besitzt.

3) Es sei $P(z) := z^2$. Zeigen Sie:

a) Es gibt ein $\zeta \in \mathbb{T}$, sodass $O^+(\zeta) = \{\, P^n(\zeta) : n \in \mathbb{N}_0 \,\}$ dicht in $\mathbb{T}$ ist.

b) Es gibt ein $\omega \in \mathbb{T}$, sodass $O^+(\omega) = \{\, P^n(\omega) : n \in \mathbb{N}_0 \,\}$ eine unendliche Menge aber nicht dicht in $\mathbb{T}$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Binärdarstellung reeller Zahlen.