Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 16. Januar 2017

Analysis III für Lehramt
Fresnel-Integrale

Beispiel 12.2.9 (Fresnel-Integrale)
Für $r > 0$ betrachten wir den Dreiecksweg $\sigma_r := [0, r, r + ir, 0]$. Dann gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz
$$\int_{\sigma_r} e^{-z^2}\, dz = 0\,.$$
Es gilt
$$\left|\int_{[r,r+ir]} e^{-z^2}\, dz\right| = \left|\int_0^1 ire^{-(r+irt)^2 ir}\, dt\right| \le r\int_0^1 e^{(t^2-1)r^2}\, dt \to 0 \quad (r \to \infty)\,.$$
Dabei folgt die Konvergenz des Integrals gegen 0 aus dem Lebesgueschen Konvergenzsatz, denn $e^{(t^2-1)r^2} \to 0$ $(r \to \infty)$ für $t \in [0, 1)$ und $e^{(t^2-1)r^2} \le 1$ für $t \in [0, 1]$. Weiter gilt
$$\lim_{r\to\infty}\int_{[0,r+ir]} e^{-z^2}\, dz = \lim_{r\to\infty}\int_{[0,r]} e^{-z^2}\, dz = \lim_{r\to\infty}\int_0^r e^{-x^2}\, dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$
Andererseits gilt
$$\lim_{r\to\infty}\int_{[0,r+ir]} e^{-z^2}\, dz = (1+i)\lim_{r\to\infty}\int_{[0,r]} e^{-(x+ix)^2}\, dx = (1+i)\int_0^\infty e^{-2ix^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$
Trennt man diese Gleichung in Real- und Imaginärteil, so folgt
$$\int_0^\infty (\cos 2x^2 + \sin 2x^2)\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,,$$
$$\int_0^\infty (\cos 2x^2 - \sin 2x^2)\, dx = 0\,.$$
Hieraus folgt
$$\int_0^\infty \cos x^2\, dx = \int_0^\infty \sin x^2\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\,.$$
Historie: Augustin Jean Fresnel, französischer Physiker und Ingenieur, 1788 – 1827. Die Fresnel-Integrale spiele in der Optik eine wichtige Rolle.