Einführung in die Funktionentheorie

1 Holomorphe Funktionen

Definition 1.1. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (offene zusammenhängende Menge). Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar* in $z_0 \in D$, wenn der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

existiert. Die Zahl $f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0)$ heißt dann *komplexe Ableitung* von f in z_0. f heißt *holomorph* in D, wenn f in jedem $z_0 \in D$ komplex differenzierbar ist. Die Menge aller in D holomorphen Funktionen bezeichnen wir mit $H(D)$. Ist f holomorph in $\mathbb{C}$, so heißt f eine *ganze Funktion*. Ist $A \subset \mathbb{C}$ eine beliebige zusammenhängende Menge, so heißt f holomorph in A, wenn es ein Gebiet $D \supset A$ gibt in dem f holomorph ist.

Es gelten sämtliche Ableitungsregeln die wir für reelle Funktionen kennen und hier nicht noch einmal formulieren. Hieraus folgt, dass $H(D)$ ein komplexer Vektorraum ist. Es ist $H(D)$ sogar eine komplexe kommutative Algebra mit Einselement.

Für eine komplexe Funktion $f\colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ schreiben wir

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) .$$

Dann können wir f auch als reelle (vektorwertige) Funktion $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffassen. Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen der reellen und der komplexen Differenzierbarkeit von f herstellen. Wir erinnern daran, dass f reell differenzierbar ist genau dann, wenn u, $v\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind.

Satz 1.2. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f = u+iv\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 = x_0+iy_0 \in D$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist komplex differenzierbar in z_0.*

(b) *f ist reell differenzierbar in (x_0, y_0), und es gelten die* Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen*

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) , \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) .$$

Ist f komplex differenzierbar in z_0, so gilt

$$f'(z) = f_x(z) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) = -if_y(z)\,.$$

Es sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann wird durch

$$(*) \qquad f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

eine stetige Funktion $f\colon U_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$ definiert.

Wir werden jetzt die Exponentialfunktion sowie die Funktionen Cosinus und Sinus ins Komplexe fortsetzen, indem wir sie durch die aus dem Reellen bekannten Potenzreihen definieren. Für $z \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$e^z = \exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,,$$

und

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^k\,, \quad \sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^k\,.$$

Diese Funktionen sind dann stetig auf $\mathbb{C}$.

Aus dem Satz über die Konvergenz des Cauchyprodukts absolut konvergenter Reihen erhalten wir für z, $w \in \mathbb{C}$ das aus dem Reellen bekannte Additionstheorem

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

auch im Komplexen. Hieraus folgt dann insbesondere $e^z \neq 0$ und $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Ersetzen wir in der Exponentialreihe z durch iz, so erhalten wir folgenden Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Hieraus ergibt sich die so genannte *Eulersche Formel*

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos x + i \sin x)\,, \quad x\,,\ y \in \mathbb{R}\,.$$

Aus den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen erhält man nun, dass exp auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist, und für die Ableitung gilt $\exp' z = \exp z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Wegen

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z\,, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

erhält man durch Addition bzw. Substraktion dieser Formeln

$$\cos z = \tfrac{1}{2}\,(e^{iz} + e^{-iz})\,, \quad \sin z = \tfrac{1}{2i}\,(e^{iz} - e^{-iz})\,.$$

Hieraus folgt, dass cos und sin ganze Funktionen sind, und für die Ableitungen gilt wie im Reellen

$$\cos' z = -\sin z\,, \quad \sin' z = \cos z\,.$$

Aus dem obigen Zusammenhang zwischen exp, cos und sin erhält man leicht, dass die aus dem Reellen bekannten Additionstheoreme für cos und sin auch im Komplexen gelten, d.h.

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w\,,$$
$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w\,.$$

Daher gelten auch alle aus dem Reellen bekannten Formeln, die hieraus abgeleitet wurden. Insbesondere gilt

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1\,.$$

Außerdem bleibt die 2π-Periodizität erhalten.

Während die reelle Exponentialfunktion eine Umkehrfunktion besitzt ist dies wegen der $2\pi i$-Periodizität für die komplexe Exponentialfunktion nicht der Fall. Für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nennt man jede Lösung z der Gleichung $e^z = w$ einen Logarithmus von w, bezeichnet mit $z = \log w$. Es ist

- $\log w \mod 2\pi i$ eindeutig bestimmt,
- $\log(w_1 w_2) = \log w_1 + \log w_2 \mod 2\pi i$.

2 Integralsatz von Cauchy

Definition 2.1. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f stetig in D und $\gamma\colon [a,b] \to D$ eine glatte Kurve. Dann heißt

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \in \mathbb{C}$$

das *komplexe Kurvenintegral* von f längs γ. Weiterhin setzen wir

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| := \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt \in \mathbb{C}$$

Ist $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_m$ eine stückweise glatte Kurve in D, so definieren wir

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\gamma_m} f(z)\,dz\,.$$

Im Folgenden verstehen wir unter einem *Integrationsweg* immer eine stückweise glatte Kurve. Den *Träger* von γ, d.h. die Menge $\gamma([a,b])$ bezeichnen wir mit $|\gamma|$.

Definition 2.2. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Eine Funktion $F\colon D \to \mathbb{C}$ heißt *komplexe Stammfunktion* von f, wenn F holomorph in D ist und $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$.

Nun gelten folgende Ergebnisse.

Satz 2.3. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *f besitzt eine komplexe Stammfunktion F in D.*

(b) *Für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in D gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0\,.$$

(c) *Für je zwei Integrationswege γ_1, γ_2 in D mit gleichen Anfangs- und Endpunkten gilt*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz\,.$$

Satz 2.4. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet bezüglich $a \in D$ und f holomorph in D. Dann besitzt f eine Stammfunktion F in D.*

Satz 2.5 (Integralsatz von Cauchy)**.** *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und f holomorph in D. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in D*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0\,.$$

Folgerung 2.6. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f holomorph in D und F eine Stammfunktion von f in D. Weiterhin sei $\gamma\colon [a,b] \to D$ ein Integrationsweg. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,.$$

Beispiel 2.7. Für $z \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ sei $\gamma_{r,z}\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma_{r,z}(t) := z + re^{it}$. Dann ist $\gamma_{r,z}'(t) = ire^{it}$ und daher folgt für $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\gamma_{r,z}} (\zeta - z)^n\,d\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} (re^{it})^n ire^{it}\,dt = ir^{n+1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)t}\,dt\,.$$

Also ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r,z}} (\zeta - z)^n\,d\zeta = \begin{cases} 1 & \text{für } n = -1\,, \\ 0 & \text{für } n \neq -1\,. \end{cases}$$

Daher besitzt die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion. Da $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ sternförmig ist, existiert hier eine Stammfunktion, nämlich der Logarithmus.

3 Integralformel von Cauchy

Satz 3.1 (Integralformel von CAUCHY). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f holomorph in D, $z_0 \in D$ und $r > 0$ mit $\overline{U_r(z_0)} \subset D$. Dann gilt für jedes $z \in U_r(z_0)$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r,z_0}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,.$$

Es sei γ ein geschlossener Integrationsweg in $\mathbb{C}$. Dann ist

$$n(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

stets eine ganze Zahl und in jeder Komponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ konstant. Insbesondere ist $n(\gamma, a) = 0$, wenn a in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ liegt. $n(\gamma, a)$ heißt *Umlaufzahl* oder *Index* von γ bezüglich a.

Satz 3.2 (Integralformel von CAUCHY für Ableitungen). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f holomorph in D. Dann ist f unendlich oft komplex differenzierbar in D. Ist $z_0 \in D$ und $r > 0$ mit $\overline{U_r(z_0)} \subset D$, so gilt für jedes $z \in U_r(z_0)$ und $k \in \mathbb{N}$*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta\,.$$

Satz 3.3 (Abschätzungen von CAUCHY). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f holomorph in D, $z_0 \in D$ und $R > r > 0$ mit $\overline{U}_R(z_0) \subset D$. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_0$*

$$\max_{|z-z_0|\le r} |f^{(k)}(z)| \le \frac{k!R}{(R-r)^{k+1}} \max_{|\zeta - z_0| = R} |f(\zeta)|\,.$$

Insbesondere gilt

$$|f^{(k)}(z_0)| \le \frac{k!}{R^k} \max_{|\zeta - z_0| = R} |f(\zeta)|\,.$$

Der folgende Satz ist eine Art Umkehrung des Integralsatzes von CAUCHY.

Satz 3.4 (Satz von MORERA). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine in D stetige Funktion und für jeden geschlossenen Integrationsweg $\gamma \in D$ gelte*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0\,.$$

Dann ist f holomorph in D.

Nun betrachten wir Folgen (f_n) holomorpher Funktionen und wollen untersuchen unter welchen Voraussetzungen sich die Holomorphie der f_n auf die Grenzfunktion vererbt. Dazu benötigen wir folgenden Konvergenzbegriff.

Definition 3.5. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{C}$ heißt *lokal gleichmäßig konvergent* in D gegen $f\colon D \to \mathbb{C}$, wenn (f_n) für jedes $z_0 \in D$ und $r > 0$ mit $\overline{U_r(z_0)} \subset D$ gleichmäßig auf $\overline{U_r(z_0)}$ gegen f konvergiert.

Satz 3.6 (Satz von WEIERSTRASS)**.** *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen in D, die in D lokal gleichmäßig gegen $f\colon D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) *f ist holomorph in D.*

(b) *Für jedes $r > 0$ mit $\overline{U_r(z_0)} \subset D$ und jeden Integrationsweg γ in $\overline{U_r(z_0)}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz\,.$$

(c) *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(f_n^{(k)})$ in D lokal gleichmäßig konvergent gegen $f^{(k)}$.*

Ein entsprechender Satz gilt auch für lokal gleichmäßig konvergente Reihen holomorpher Funktionen. Insbesondere stellt also jede Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius eine im Konvergenzkreis holomorphe Funktion dar, d.h. ist

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

und ist der Konvergenzradius ρ der Potenzreihe positiv, so ist f holomorph in $U_\rho(z_0)$. Die Ableitungen von f erhält man wie im Reellen durch gliedweises Differenzieren. Ist speziell $\rho = \infty$, so ist f eine ganze Funktion.

Nun zeigen wir, dass auch die Umkehrung dieser Aussage gilt, d.h. dass sich jede holomorphe Funktion in eine Potenzreihe entwickeln lässt. Wir erinnern uns, dass dies für unendlich oft differenzierbare reelle Funktionen im Allgemeinen nicht der Fall war.

Satz 3.7. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f eine in D holomorphe Funktion, $z_0 \in D$ und $R := \sup\{\, r > 0 : U_r(z_0) \subset D \,\}$. Dann ist f in $U_R(z_0)$ in eine Potenzreihe entwickelbar, d.h. es gilt für $z \in U_R(z_0)$*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\,, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

bzw.

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,,$$

wobei $0 < r < R$.

Aus der Aussage dieses Satzes folgt insbesondere, dass für den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe gilt $\rho \geq R$.

Folgerung 3.8 (Koeffizientenabschätzungen von CAUCHY). *Es sei*

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius ρ. Dann gilt für jedes $r \in (0, \rho)$ und $k \in \mathbb{N}_0$

$$|a_k| \le \frac{1}{r^k} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)| \, .$$

Satz 3.9 (Satz von LIOUVILLE). *Es sei f eine ganze beschränkte Funktion. Dann ist f konstant.*

Satz 3.10 (Fundamentalsatz der Algebra). *Es sei P ein Polynom mit* $\operatorname{Grad} P \ge 1$. *Dann besitzt P mindestens eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Ist

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

ein Polynom vom Grad $n \ge 1$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und ein Polynom Q mit

$$P(z) = (z - z_0)^k Q(z)$$

und $Q(z_0) \ne 0$. Die Zahl k heißt die *Vielfachheit* der Nullstelle z_0 von P. Man sagt auch: z_0 ist eine *k-fache Nullstelle* von P.

Aus diesen Überlegungen folgt insbesondere, dass ein Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen besitzt. Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt dann, dass ein Polynom vom Grad n unter Berücksichtigung der Vielfachheiten genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ besitzt. Sind $z_1, \dots, z_m$ die verschiedenen Nullstellen von P mit Vielfachheiten $k_1, \dots, k_m$, so erhalten wir die *Linearfaktorzerlegung* von P.

$$P(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_m)^{k_m} \, .$$

Dabei gilt $k_1 + \cdots + k_m = n$.

Die Vielfachheit einer Nullstelle kann man mit Hilfe der Ableitung von P wie folgt charakterisieren. Es ist z_0 eine k-fache Nullstelle von P genau dann, wenn

$$P(z_0) = P'(z_0) = \cdots = P^{(k-1)}(z_0) = 0 \, , \quad P^{(k)}(z_0) \ne 0 \, .$$

Dieses Ergebnis über die Nullstellen von Polynomen legt folgende Frage nahe. Welche Eigenschaften hat die Nullstellenmenge einer beliebigen holomorhen Funktion. Hierzu benötigen wir folgendes Ergebnis über Potenzreihen. Dazu führen wir folgende Bezeichnung ein. Für $r > 0$ sei $\dot{U}_r(z_0) := U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Satz 3.11 (Identitätssatz für Potenzreihen). *Es sei*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius ρ*, und es gebe eine Folge* (z_n) *in* $\dot{U}_\rho(z_0)$ *mit* $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$ *und* $f(z_n) = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*. Dann gilt* $a_j = 0$ *für alle* $j \in \mathbb{N}_0$*, d.h.* $f(z) = 0$ *für alle* $z \in U_\rho(z_0)$*.*

Satz 3.12 (Identitätssatz). *Es sei* $D \subset \mathbb{C}$ *ein Gebiet und* f *eine in* D *holomorphe Funktion. Weiterhin gebe es eine Teilmenge* $M \subset D$*, die einen Häufungspunkt in* D *besitzt, und es gelte* $f(z) = 0$ *für alle* $z \in M$*. Dann ist* $f(z) = 0$ *für alle* $z \in D$*.*

Folgerung 3.13. *Es sei* $D \subset \mathbb{C}$ *ein Gebiet und* f *eine in* D *holomorphe Funktion. Weiterhin gebe es ein* $z_0 \in D$ *mit* $f^{(k)}(z_0) = 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}_0$*. Dann ist* $f(z) = 0$ *für alle* $z \in D$*.*

Es sei nun f eine in D holomorophe Funktion mit $f \not\equiv 0$. Dann folgt, dass die Nullstellenmenge $Z(f)$ von f keinen Häufungspunkt in D hat und damit eine diskrete Menge in D ist, d.h. zu jeder Nullstelle z_0 von f gibt es ein $\delta > 0$ so, dass in $U_\delta(z_0)$ keine weitere Nullstelle von f liegt. Man kann zeigen, dass eine diskrete Menge höchstens abzählbar ist.

Ist z_0 eine Nullstelle von f, so folgt aus Folgerung 3.13, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Das kleinste solche k heißt die *Vielfachheit* der Nullstelle z_0. Auch dieses Ergebnis hat kein Analogon für reelle Funktionen. Es folgt leicht, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- $z_0 \in D$ ist eine k-fache Nullstelle von f.
- $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ und $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.
- Es gibt eine in D holomorphe Funktion g mit $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ für $z \in D$ und $g(z_0) \neq 0$.

Satz 3.14. *Es sei* $z_0 \in \mathbb{C}$*,* $r > 0$*,* f *holomorph in* $D = U_r(z_0)$ *und* $m \in \mathbb{N}$ *mit* $m \geq 2$*. Weiterhin sei* f *nullstellenfrei in* D*. Dann besitzt* f *in* D *einen holomorphen Logarithmus und eine holomorphe* m*-te Wurzel, d.h. es gibt in* D *holomorphe Funktionen* g *und* h *mit* $e^{g(z)} = f(z)$ *und* $(h(z))^m = f(z)$ *für alle* $z \in D$*.*

4 Isolierte Singularitäten

Definition 4.1. Ist $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und f holomorph in $\dot{U}_r(z_0)$, so heißt z_0 eine *isolierte Singularität* von f. Genauer heißt z_0

(a) eine *hebbare Singularität* von f, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ existiert,

(b) ein *Pol* von f, wenn $f(z) \to \infty$ $(z \to z_0)$,

(c) eine *wesentliche Singularität* von f, wenn z_0 weder eine hebbare Singularität noch ein Pol von f ist.

Satz 4.2. *Es sei $z_0 \subset \mathbb{C}$, $r > 0$ und f holomorph in $\dot{U}_r(z_0)$. Es ist z_0 eine hebbare Singularität von f genau dann, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.*

Eine äquivalente Formulierung dieses Satzes lautet wie folgt.

Folgerung 4.3 (RIEMANNscher Hebbarkeitssatz)**.** *Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ und f holomorph in $\dot{U}_R(z_0)$. f hat in z_0 eine hebbare Singularität genau dann, wenn es ein r gibt so, dass $0 < r < R$ und f in $\dot{U}_r(z_0)$ beschränkt ist.*

Satz 4.4. *Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und f holomorph in $\dot{U}_r(z_0)$. Gilt $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = c \neq 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so hat f in z_0 einen Pol. In diesem Fall hat f eine Entwicklung der Form*

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \,, \quad z \in \dot{U}_r(z_0) \subset D$$

mit $a_{-m} = c \neq 0$.

Die Zahl m nennt man die *Vielfachheit* oder *Ordnung* des Pols. Weiter heißt

$$H(z, z_0) = \sum_{k=-m}^{-1} a_k (z - z_0)^k = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0}$$

der *Hauptteil* von f in z_0.

Folgerung 4.5. *Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und f holomorph in $\dot{U}_r(z_0)$. f hat in z_0 einen m-fachen Pol genau dann, wenn z_0 eine m-fache Nullstelle von $\frac{1}{f}$ ist.*

Satz 4.6 (Satz von CASORATI-WEIERSTRASS)**.** *Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ und f holomorph in $\dot{U}_R(z_0)$. Hat f in z_0 eine wesentliche Singularität, so ist $f(\dot{U}_r(z_0))$ dicht in $\mathbb{C}$ für jedes r mit $0 < r < R$, d.h. zu jedem $c \in \widehat{\mathbb{C}}$ gibt es eine Folge (z_n) in $\dot{U}_r(z_0)$ mit $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$ und $f(z_n) \to c$ $(n \to \infty)$.*

Ist f holomorph in $\Delta_R := \{\, z \in \mathbb{C} : |z| > R \,\}$ für ein $R > 0$, so heißt $z_0 = \infty$ *isolierte Singularität* von f. Es ist dann $g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$ holomorph in $\dot{U}_{1/R}(0)$. Der Typ der Singularität $z_0 = \infty$ von f ist dann definiert durch den Typ der Singularität von g in 0.

5 Lokales Abbildungsverhalten

Satz 5.1 (Argumentprinzip)**.** *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f holomorph in D, $z_0 \in D$ und $R > 0$ mit $U_R(z_0) \subset D$. Weiter sei $0 < r < R$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \partial U_r(z_0)$. Dann ist der Wert des Integrals*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = r} \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz$$

gleich der Anzahl der Nullstellen von f in $U_r(z_0)$, wobei jede Nullstelle mit Vielfachheit zu zählen ist.

Satz 5.2 (Satz von HURWITZ). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen in D, die lokal gleichmäßig in D gegen eine Funktion f konvergiert. Dann gelten folgende Aussagen:*

- *Besitzt jedes f_n höchstens k Nullstellen in D, so besitzt auch f höchstens k Nullstellen in D oder es gilt $f(z) = 0$ für alle $z \in D$.*
- *Ist jedes f_n eine konforme Abbildung, so ist auch f eine konforme Abbildung oder es ist f konstant.*

Satz 5.3 (Satz von der Gebietstreue). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine in D holomorphe Funktion, die nicht konstant ist. Dann ist $f(D)$ ein Gebiet.*

Man nennt dieses Ergebnis auch Satz von der offenen Abbildung.

Satz 5.4. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f holomorph in D, $z_0 \in D$, $f(z_0) = w_0$, $f^{(j)}(z_0) = 0$ für $j = 1, \ldots, k-1$ und $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Dann gibt es Kreisscheiben $W = U_\varepsilon(w_0)$ und $V = U_{\varepsilon^{1/k}}(0)$, ein Gebiet $U \subset D$ mit $z_0 \in U$ und eine konforme Abbildung $h\colon U \to V$ mit $h(z_0) = 0$ und*

$$f(z) = w_0 + (h(z))^k\,, \quad z \in U.$$

Jedes $w \in W$ besitzt unter f genau k Urbilder in U.

Satz 5.5 (Maximumprinzip). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine in D holomorphe Funktion. Besitzt $|f|$ in $z_0 \in D$ ein lokales Maximum, so ist f konstant.*

Satz 5.6 (Minimumprinzip). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine in D holomorphe Funktion. Besitzt $|f|$ in $z_0 \in D$ ein lokales Minimum, so ist f konstant oder $f(z_0) = 0$.*

Satz 5.7 (Maximumprinzip, 2. Version). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine in D holomorphe Funktion, die nicht konstant ist. Gilt*

$$\limsup_{z \to \zeta} |f(z)| \leq M$$

für alle $\zeta \in \partial D$ und $\zeta = \infty$, falls D unbeschränkt ist, so ist $|f(z)| < M$ für alle $z \in D$.

Folgerung 5.8. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und f eine auf $\overline{D}$ stetige und in D holomorphe Funktion. Dann gilt*

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|\,.$$

Satz 5.9 (Lemma von SCHWARZ). *Es sei f holomorph in $\mathbb{D}$, $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ und $f(0) = 0$. Dann gilt entweder $|f(z)| < |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$ und $|f'(0)| < 1$ oder es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $f(z) = e^{i\alpha} z$ für alle $z \in \mathbb{D}$.*