Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 1. Februar 2016

Funktionentheorie II

13. Übungsblatt, WiSe 2015/16

1) a) Es sei f eine ganze Funktion vom Exponentialtyp 0 und $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

   Geben Sie ein Beispiel einer ganzen Funktion an, das zeigt, dass die Wachstumsbedingung an f nicht abgeschwächt werden kann.

   b) Es sei f eine ganze periodische Funktion vom Exponentialtyp 0. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

   Geben Sie ein Beispiel einer ganzen Funktion an, das zeigt, dass die Wachstumsbedingung an f nicht abgeschwächt werden kann.

2) Beweisen Sie die folgenden beiden Varianten des ersten Liouvilleschen Satzes über elliptische Funktionen.

   a) Es sei f eine ganze Funktion, Λ ein Gitter und zu jedem $\omega \in \Lambda$ gebe es ein Polynom P_ω mit $f(z+\omega) = f(z) + P_\omega(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist f ein Polynom.

   b) Es sei f eine ganze Funktion, Λ ein Gitter und zu jedem $\omega \in \Lambda$ gebe es eine Konstante c_ω mit $f(z+\omega) = c_\omega f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann gibt es Konstanten c, $a \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = ce^{az}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

3) Es sei f eine elliptische Funktion der Ordnung 2 zum Gitter Λ, sodass alle Pole von f in Λ liegen. Zeigen Sie, dass es Konstanten a, $b \in \mathbb{C}$ gibt mit $f(z) = a + b\wp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$.

4) Es sei Λ ein Gitter. Zeigen Sie, dass es keine elliptische Funktion f zum Gitter Λ gibt, sodass jede weitere elliptische Funktion zum Gitter Λ als rationale Funktion in f dargestellt werden kann.

   Hinweis: Nehmen Sie an, dass es eine solche Funktion f gibt, analysieren Sie die Gleichung $f(z) = f(w)$ und zeigen Sie, dass f eine elliptische Funktion der Ordnung 1 sein müsste.