Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 25. Januar 2016

Funktionentheorie II

12. Übungsblatt, WiSe 2015/16

1) Beweisen Sie die folgende 3. Version des Maximumprinzips für holomorphe Funktionen: Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f eine holomorphe Funktion in D und es gebe eine Konstante $M \geq 0$ mit $\limsup\limits_{z \to \zeta} |f(z)| \leq M$ für alle $\zeta \in \partial_\infty D$. Dann ist $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in D$.

   Dabei ist $\partial_\infty D := \partial D$, wenn D beschränkt und $\partial_\infty D := \partial D \cup \{\infty\}$, wenn D unbeschränkt ist.

2) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f eine holomorphe Funktion in D. Weiter sei φ eine beschränkte, nullstellenfreie holomorphe Funktion in D. Schließlich sei $M \geq 0$ eine Konstante und A, $B \subset \partial_\infty D$ mit $A \cup B = \partial_\infty D$ und $A \cap B = \emptyset$, sodass folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

   a) Für jedes $a \in A$ gelte $\limsup\limits_{z \to a} |f(z)| \leq M$.
   b) Für jedes $b \in B$ und $\varepsilon > 0$ gelte $\limsup\limits_{z \to a} |f(z)||\varphi(z)|^\varepsilon \leq M$.

   Zeigen Sie, dass dann $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in D$ gilt.

3) a) Es sei $a \geq \frac{1}{2}$, $\mathbb{W} := \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{2a} \right\}$ ein Winkelraum, f eine holomorphe Funktion in $\mathbb{W}$ und es gebe eine Konstante $M \geq 0$ mit $\limsup\limits_{z \to \zeta} |f(z)| \leq M$ für alle $\zeta \in \partial\mathbb{W}$. Weiter seien P, b, $r_0 \in \mathbb{R}$ Konstanten mit $P \geq 0$, $b < a$, $r_0 \geq 0$ und $|f(z)| \leq Pe^{|z|^b}$ für alle $z \in \mathbb{W}$ mit $|z| \geq r_0$. Zeigen Sie, dass dann $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{W}$ gilt.

   b) Es sei $\mathbb{W}$ wie in (a), f eine holomorphe Funktion in $\mathbb{W}$ und es gebe eine Konstante $M \geq 0$ mit $\limsup\limits_{z \to \zeta} |f(z)| \leq M$ für alle $\zeta \in \partial\mathbb{W}$. Weiter gebe es zu jedem $\delta > 0$ Konstanten $P = P(\delta) \geq 0$ und $r_0 = r_0(\delta) \geq 0$ mit $|f(z)| \leq Pe^{\delta|z|^a}$ für alle $z \in \mathbb{W}$ mit $|z| \geq r_0$. Zeigen Sie, dass dann $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{W}$ gilt.

4) Es sei $\mathbb{S}$ der Horizontalstreifen mit $\mathbb{S} := \left\{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2} \right\}$, f eine holomorphe Funktion in $\mathbb{S}$ und $M \geq 0$ eine Konstante mit $\limsup\limits_{z \to \zeta} |f(z)| \leq M$ für alle $\zeta \in \partial\mathbb{S}$. Weiter gebe es zu jedem $\delta > 0$ Konstanten $P = P(\delta) \geq 0$ und $x_0 = x_0(\delta) \geq 0$ mit $|f(x+iy)| < Pe^{\delta e^x}$ für alle $x + iy \in \mathbb{S}$ mit $|x| \geq x_0$. Zeigen Sie, dass dann $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{S}$ gilt.