

Funktionentheorie II

11. Übungsblatt, WiSe 2015/16

- 1) Welche der folgenden Abbildungen sind eigentlich?
 - a) $f: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$.
 - b) $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, wobei P ein beliebiges nichtkonstantes Polynom ist.
 - c) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $f(z) = e^z$.
 - d) $P: D_R = P^{-1}(\{w \in \mathbb{C} : |w| > R\}) \rightarrow \{w \in \mathbb{C} : |w| > R\}$, wobei P ein beliebiges nichtkonstantes Polynom und $R > 0$ ist. Ist D_R überhaupt ein Gebiet?
- 2) Bestimmen Sie das Bildgebiet G des Kreisrings $D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < \frac{1}{r}\}$ mit $0 < r < 1$ unter der Joukowskiabbildung $J(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ und zeigen Sie, dass $J: D \rightarrow G$ eine eigentliche Abbildung vom Grad 2 ist.
- 3) Zeigen Sie: Es ist $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ eine eigentliche Abbildung genau dann, wenn f ein endliches Blaschkeprodukt ist, d.h.

$$f(z) = e^{i\alpha} \prod_{j=1}^k \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{D}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

- 4) Es seien $a > 0$, $r > 0$ mit $a + r < 1$. Finden Sie eine konforme Abbildung f des nichtkonzentrischen Kreisrings $D = \{z \in \mathbb{D} : |z - a| > r\}$ auf einen konzentrischen Kreisring $\{w \in \mathbb{C} : 0 < \rho < |w| < 1\}$. Zeigen Sie, dass dabei ρ eindeutig bestimmt ist und berechnen Sie ρ .