Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 11. Januar 2016

# Funktionentheorie II

10. Übungsblatt, WiSe 2015/16

1) Es sei $Q := \{\, z = x + iy : |x| < 1,\ |y| < 1 \,\}$ das Einheitsquadrat. Kann man eine konforme Abbildung $f$ von $Q$ auf $\mathbb{D}$ konstruieren so, dass

$$f(0) = 0\,, \quad f(\pm 1) = \pm 1\,, \quad f(\pm i) = \pm i\,,$$
$$f(\pm 1 \pm i) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(\pm 1 \pm i)\,?$$

Wie lautet gegebenenfalls die Formel für die Umkehrabbildung $F$?

Beantworten Sie auch die folgende allgemeinere Frage: Kann man eine konforme Abbildung $f_n$ eines regelmäßigen $n$-Ecks $D_n$ ($n \geq 3$) auf $\mathbb{D}$ konstruieren so, dass die Ecken von $D_n$ auf die $n$-ten Einheitswurzeln abgebildet werden? Wie lautet gegebenenfalls die Formel für die Umkehrabbildung $F_n$?

2) Es sei $\Gamma := \{\, x + iy \in \mathbb{C} : x > 0,\ y = x^2 \,\}$. Zeigen Sie, dass $\Gamma$ ein analytischer Jordanbogen ist und bestimmen Sie den Spiegelpunkt $z^*$ von $z \in \mathbb{C}$ an $\Gamma$. Entwickeln Sie $z^*$ in eine unendliche Reihe nach Potenzen von $\bar{z}$.

3) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein bezüglich $\mathbb{R}$ symmetrisches, einfach zusammenhängendes Gebiet, $D \neq \mathbb{C}$, $0 \in D$ und $f\colon D \to \mathbb{D}$ die konforme Abbildung von $D$ auf $\mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) > 0$. Zeigen Sie:

a) Für $x \in D \cap \mathbb{R}$ gilt $f(x) \in \mathbb{R}$ und $f'(x) > 0$.

b) Ist $D$ zusätzlich bezüglich der imaginären Achse symmetrisch, so gilt $f(-z) = -f(z)$ für $z \in D$.

c) Ist $D$ das Innere des Sechsecks mit den Ecken $e^{2\pi i k/6}$ ($k = 0, 1, \ldots, 5$), so besitzt $f$ die Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{6n+1}\,, \quad |z| < \rho$$

mit einem $\rho > 0$ und $a_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

4) Für $a$, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei $T$ die Möbius-Transformation

$$T(z) := \frac{z - ia}{z - ib}\,.$$

Weiter sei log der Hauptzweig des Logarithmus, d.h. $\log 1 = 0$ und $\mathbb{H}$ bezeichne die rechte Halbebene, d.h. $\mathbb{H} := \{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \,\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\log T(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ bis auf $z = ic$ mit $c \in [a, b]$ definiert und holomorph ist und für $h(z) := \operatorname{Im} \log T(z)$ und $z \in \mathbb{H}$ gilt $0 < h(z) < \pi$. Außerdem ist $h$ harmonisch in $\mathbb{H}$.

b) Zeigen Sie, dass $\log(z - ic)$ für jedes $z \in \mathbb{H}$ und jedes $c \in \mathbb{R}$ definiert und holomorph ist und $|\operatorname{Im} \log(z - ic)| < \frac{\pi}{2}$ für $z \in \mathbb{H}$.

c) Es sei $h$ wie in (a) definiert. Zeigen Sie, dass

$$h(z) = \operatorname{Im} [\log(z - ia) - \log(z - ib)]$$

für $z \in \mathbb{H}$.

d) Zeigen Sie

$$\int_a^b \frac{dt}{z - it} = i[\log(z - ib) - \log(z - ia)], \quad z \in \mathbb{H}.$$

e) Zeigen Sie mit Hilfe von (c) und (d)

$$h(x + iy) = \int_a^b \frac{x}{x^2 + (y - t)^2} \, dt = \arctan \frac{y - a}{x} - \arctan \frac{y - b}{x}$$

für $x + iy \in \mathbb{H}$.

f) Interpretieren Sie (e) geometrisch und zeigen Sie, dass $h(z)$ für $z \in \mathbb{H}$ der Winkel an $z$ im Dreieck mit den Ecken $z$, $ia$, $ib$ ist.