Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 4. Januar 2016

Funktionentheorie II

9. Übungsblatt, WiSe 2015/16

1) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $c \in \mathbb{C}$ und $\mathscr{F}$ die Familie aller in D schlichten Funktionen f mit $f(z) \neq c$ für alle $z \in D$. Zeigen Sie, dass $\mathscr{F}$ normal im verallgemeinerten Sinne in D ist.

2) Bestimmen Sie jeweils eine konforme Abbildung der folgenden Gebiete auf die obere Halbebene $\mathbb{H}^+$:

   a) Sektor $S := \left\{ z \in \mathbb{C} : -\pi < \arg z < \frac{\pi}{2} \right\}$,

   b) Vertikaler Streifen $V := \{ z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1 \}$,

   c) $D := \{ z = x + iy \in \mathbb{C} : x > 0,\ y > 0,\ xy < 1 \}$,

   d) Es sei G das Gebiet, das berandet wird von der positiven reellen Achse, der Winkelhalbierenden $y = x$, $x \geq 0$ und der Hyperbel $xy = 1$, $x \geq 1$.

3) Für $0 < r < R < \infty$ sei $A(r, R) := \{ z \in \mathbb{C} : r < |z| < R \}$. Man nennt $A(r, R)$ einen Kreisring.

   a) Zeigen Sie: Die Kreisringe $A(1, R_1)$ und $A(1, R_2)$ sind konform äquivalent genau dann, wenn $R_1 = R_2$.

   b) Bestimmen Sie alle konformen Abbildungen des Kreisrings $A(1, R)$ auf sich.

4) a) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in D$, f eine in $D \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion und $G := f(D \setminus \{a\})$ sei beschränkt. Zeigen Sie, dass f eine hebbare Singularität in a hat und dass $f(a) \in \partial G$, falls f schlicht in $D \setminus \{a\}$ ist.

   b) Zeigen Sie, dass es keine konforme Abbildung f von $D = \dot{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ auf $G = A(r, R)$ mit $0 < r < R < \infty$ gibt.