Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 14. Dezember 2015

Funktionentheorie II

8. Übungsblatt, WiSe 2015/16

1) Es seien f und g ganze Funktionen mit $f^n + g^n = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Zeigen Sie, dass f und g konstant sind.

2) a) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen in D, die bezüglich der chordalen Metrik lokal gleichmäßig in D gegen f konvergiert. Zeigen Sie: Ist $f(z_0) = \infty$ für ein $z_0 \in D$, so ist $f(z) = \infty$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

   b) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\mathscr{F}$ eine Familie holomorpher Funktionen in D und $N \in \mathbb{N}$. Weiter gelte, dass jedes $f \in \mathscr{F}$ den Wert 1 nicht annimmt und höchstens N Nullstellen (inklusive Vielfachheit) hat. Zeigen Sie, dass $\mathscr{F}$ normal in $\mathbb{D}$ ist.

3) Zeigen Sie:

   a) Die ganze Funktion $f(z) = e^z + e^{-z}$ nimmt jeden Wert $a \in \mathbb{C}$ unendlich oft an.

   b) Die meromorphe Funktion $f(z) = e^z + \frac{1}{1-e^z}$ nimmt jeden Wert $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ unendlich oft an.

4) Bestimmen Sie alle konformen Abbildungen f von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}$.

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr