Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 7. Dezember 2015

Funktionentheorie II

7. Übungsblatt, WiSe 2015/16

1) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, (f_n) eine lokal beschränkte Folge in $H(D)$, $z_0 \in D$ und für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gelte $f_n^{(k)}(z_0) \to 0$ $(n \to \infty)$. Zeigen Sie, dass (f_n) lokal gleichmäßig in D gegen die Nullfunktion konvergiert.

2) a) Es seien $\mathscr{F} := \{\, f_\varepsilon : 0 < \varepsilon \leq 1 \,\}$ mit $f_\varepsilon(z) := \frac{z}{z+\varepsilon}$ und $\mathscr{G} := \{\, g_\varepsilon : 0 < \varepsilon \leq 1 \,\}$ mit $g_\varepsilon(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$. Zeigen Sie, dass $\mathscr{F}$ normal in $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ und $\mathscr{G}$ normal in $\mathbb{C}$ ist. Bestimmen Sie $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon^{\#}(z)$ und $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon^{\#}(z)$.

   b) Es sei $\mathscr{F} := \{\, f \in H(\mathbb{D}) : |f(z) + f'(z)| \leq 1 \text{ für alle } z \in \mathbb{D} \,\}$. Zeigen Sie, dass $\mathscr{F}$ im verallgemeinerten Sinne normal in $\mathbb{D}$ ist.

3) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge meromorpher Funktionen in D, die lokal gleichmäßig in D gegen f konvergiert. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n^{\#})$ der sphärischen Ableitungen lokal gleichmäßig in D gegen $f^{\#}$ konvergiert.

4) Es sei f eine ganze Funktion, die nicht von der Form $f(z) = z + b$ mit einem $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist. Zeigen Sie, dass $f \circ f$ einen Fixpunkt besitzt, d.h. es gibt ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $(f \circ f)(z_0) = f(f(z_0)) = z_0$.

   Geben Sie ein Beispiel einer solchen Funktion an, die keinen Fixpunkt besitzt.