Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 30. November 2015

Funktionentheorie II

6. Übungsblatt, WiSe 2015/16

1) Es sei (f_n) eine Folge in $H(\mathbb{D})$, die auf jeder Kreislinie $K_r = \partial U_r(0)$, $0 < r < 1$ gleichmäßig konvergiert. Zeigen Sie, dass (f_n) lokal gleichmäßig in $\mathbb{D}$ konvergiert.

   Finden Sie eine Folge in $C(\mathbb{D})$, für die die obige Aussage nicht gilt. Kann man eine solche Folge auch in $C^\infty(\mathbb{D})$ finden?

2) Es seien D, $G \subset \mathbb{C}$ Gebiete, $\mathscr{F} \subset H(D)$ normal in D, $f(D) \subset G$ für alle $f \in \mathscr{F}$, g holomorph in G und g sei auf jeder beschränkten Teilmenge von G beschränkt. Zeigen Sie, dass dann $\mathscr{F}_g := \{ g \circ f : f \in \mathscr{F} \}$ normal in D ist.

3) Für $f \in H(\mathbb{D})$ und $0 < r < 1$ setzen wir (vgl. Bemerkung 6.3.4)

$$m(r, f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta$$

   und für $M > 0$ sei

$$\mathscr{N}_M := \{ f \in H(\mathbb{D}) : m(r, f) \leq M \, , \ 0 < r < 1 \} \, .$$

   Zeigen Sie, dass $\mathscr{N}_M$ normal in $\mathbb{D}$ ist.

   Offensichtlich enthält $\mathscr{N}_M$ alle Funktionen $f \in H(\mathbb{D})$ mit $|f(z)| \leq e^M$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Geben Sie ein Beispiel einer unbeschränkten Funktion in $\mathscr{N}_M$ an.

4) a) Es sei (f_n) eine gleichmäßig beschränkte Folge in $H(\mathbb{D})$, (a_k) eine Folge paarweise verschiedener Punkte in $\mathbb{D}$ so, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1 - |a_k|) = \infty$ und (f_n) in jedem a_k konvergent. Zeigen Sie, dass dann (f_n) lokal gleichmäßig in D konvergiert.

   b) Es sei (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen $f_n \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D} \setminus \{0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Zeigen Sie, dass (f_n) lokal gleichmäßig in $\mathbb{D}$ gegen 0 konvergiert.