Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 23. November 2015

Funktionentheorie II

5. Übungsblatt, WiSe 2015/16

1) Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, (f_n) eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{C}$, die in D lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert und (z_n) eine Folge in D, die gegen ein $z^* \in D$ konvergiert.

   a) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z_n) = f(z^*)$.
   b) Analysieren Sie Ihren Beweis aus (a) und prüfen Sie, inwieweit man die Voraussetzungen an (f_n) abschwächen kann.

2) Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{C}$, die in D gleichgradig stetig ist und die in D punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergiert. Zeigen Sie, dass (f_n) lokal gleichmäßig in D gegen f konvergiert.

3) Konstruieren Sie eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ so, dass $0 \le f_n(x) \le 1$ für alle $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$ und (f_n) punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, aber (f_n) in keinem Teilintervall von $[0,1]$ gleichmäßig konvergiert.

   Kann man die Funktionen f_n auch so wählen, dass sie stetig auf $[0,1]$ bzw. sogar unendlich oft differenzierbar auf $[0,1]$ sind?

4) Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f holomorph in D, $f(D) \subset D$ und $z_0 \in D$ ein Fixpunkt von f (d.h. $f(z_0) = z_0$) mit $|f'(z_0)| < 1$. Weiter bezeichne f_n die n-te Iterierte von f, d.h. $f_1 = f$ und $f_{n+1} = f_n \circ f = f \circ f_n$. Zeigen Sie, dass es eine Umgebung U von z_0 gibt so, dass (f_n) in U lokal gleichmäßig gegen z_0 konvergiert.