Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 16. November 2015

Funktionentheorie II

4. Übungsblatt, WiSe 2015/16

1) Bestimmen Sie die Ordnungen der folgenden ganzen Funktionen f:

   a) $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - a^n z)$, wobei $0 < |a| < 1$,

   b) $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n!}\right)$,

   c) $f(z) = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$, wobei $\gamma > 0$.

2) Es sei

$$f(z) := \int_0^z e^{\zeta^2}\, d\zeta\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

   Zeigen Sie, dass f keinen Picardschen Ausnahmewert besitzt, d.h. f nimmt jeden Wert $w \in \mathbb{C}$ unendlich oft an (obwohl f' den Wert 0 nie annimmt).

   Hinweis: Zeigen Sie, $\rho(f) = 2$, führen Sie den Beweis indirekt und benutzen Sie den Hadamardschen Faktorisierungssatz.

3) a) Es seien f und g ganze Funktionen endlicher Ordnung ρ und (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $f(a_n) = g(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \to \infty$ $(n \to \infty)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-\rho-\varepsilon} = \infty$ für ein $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass $f = g$.

   b) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f endlicher Ordnung ρ mit $f(\log n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   c) Bestimmen Sie eine ganze Funktion f mit $f(\log n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche Ordnung hat f?

4) Es sei f eine nicht konstante ganze Funktion endlicher Ordnung. Zeigen Sie, dass f jeden Wert $w \in \mathbb{C}$ annimmt mit höchstens einer Ausnahme, d.h. es gibt höchstens einen Wert $w_0 \in \mathbb{C}$, den f nicht annimmt.