

Funktionentheorie II

3. Übungsblatt, WiSe 2015/16

- 1) Es sei f eine ganze Funktion und $M(r, f)$ der Maximalbetrag von f (vgl. Definition 6.3.1). Zeigen Sie, dass $M(r, f)$ eine stetige Funktion von r ist.
- 2) Es seien f und g ganze Funktionen. Zeigen Sie:
 - a) (i) $\rho(f + g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$,
(ii) $\rho(f \cdot g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$.
 - b) Ist $\rho(f) \neq \rho(g)$, so gilt in (a) (i) Gleichheit.
 - c) Geben Sie Beispiele an, dass in (a) in beiden Fällen „ $<$ “ stehen kann.
- 3) Es sei f eine gerade ganze Funktion und $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $g(z) := f(\sqrt{z})$. Zeigen Sie, dass g eine ganze Funktion ist und $\rho(g) = \frac{1}{2}\rho(f)$.
- 4) Es seien f und g ganze Funktionen, die die Funktionalgleichung $f^2 + g^2 = 1$ erfüllen. Zeigen Sie, dass es eine ganze Funktion h gibt, sodass entweder $f(z) = \cos h(z)$ und $g(z) = \sin h(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ oder umgekehrt.