Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 2. November 2015

Funktionentheorie II

2. Übungsblatt, WiSe 2015/16

1) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und u eine harmonische Funktion in D. Zeigen Sie:

   a) $f := u_x - iu_y$ ist holomorph in D.

   b) u_x und u_y sind harmonisch in D.

2) a) Beweisen Sie folgenden Identitätssatz für harmonische Funktionen. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, u eine harmonische Funktion in D, $z_0 \in D$, $r > 0$ mit $U_r(z_0) \subset D$ und $u(z) = 0$ für $z \in U_r(z_0)$. Dann ist $u(z) = 0$ für alle $z \in D$.

   b) Beweisen Sie folgende Version des Maximumprinzips für harmonische Funktionen. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und u eine harmonische Funktion in D, die in $z_0 \in D$ ein lokales Maximum besitzt. Dann ist u konstant in D.

   c) Beweisen Sie den Satz von der offenen Abbildung für harmonische Funktionen. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und u eine nicht konstante harmonische Funktion in D. Dann ist die Bildmenge $u(D)$ von D unter u ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$. Geben Sie Beispiele an, dass dieses Intervall unbeschränkt oder auch ganz $\mathbb{R}$ sein kann.

3) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und u eine harmonische Funktion in D. Zeigen Sie, dass für jedes $z_0 \in D$ und jedes $r > 0$ mit $\overline{U_r(z_0)} \subset D$ gilt

$$u(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\overline{U_r(z_0)}} u(x, y)\, dx\, dy\,.$$

4) Es sei $u\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(z) := \operatorname{Im}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right].$$

   Zeigen Sie: u ist harmonisch in $\mathbb{D}$, u nimmt in $\mathbb{D}$ sowohl positive als auch negative Werte an und für jedes $\theta \in [0, 2\pi)$ gilt $\lim\limits_{r \to 1-} u(re^{i\theta}) = 0$. Warum ist dies kein Widerspruch zur zweiten Version des Maximumprinzips für harmonische Funktionen (Satz 6.1.3)?