

Funktionentheorie II

1. Übungsblatt, WiSe 2015/16

1) Bestimmen Sie den Wert der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

2) Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right).$$

3) Zeigen Sie, dass man das unendliche Produkt

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{z^4}{n^4} \right)$$

durch elementare Funktionen ausdrücken kann und folgern Sie dann daraus, dass

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^4} \right) = \frac{1}{8\pi} (e^{\pi} - e^{-\pi}).$$

4) Beweisen Sie die Produktdarstellung

$$e^z - 1 = ze^{z/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2} \right).$$