

## Funktionentheorie I

13. Übungsblatt, SoSe 2015

Keine Abgabe, keine Korrektur!

- 1) Untersuchen Sie die folgenden Produkte auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a)  $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

b)  $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$

c)  $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$

d)  $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

*Hinweis:* Verwenden Sie in Teil (c) Aufgabe 4 auf Blatt 12.

- 2) Zeigen Sie, dass für  $z \in \mathbb{D}$  gilt

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1 - z}.$$

- 3) a) Es sei  $0 < |a| < 1$  und  $|z| \leq r < 1$ . Zeigen Sie

$$\left| \frac{a + |a|z}{(1 - \bar{a}z)a} \right| \leq \frac{1 + r}{1 - r}.$$

- b) Es sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  mit  $0 < |a_n| < 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|)$  konvergent. Zeigen Sie, dass das unendliche Produkt

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z}$$

in  $\mathbb{D}$  lokal gleichmäßig konvergiert und dass  $|B(z)| \leq 1$  für alle  $z \in \mathbb{D}$ . Welche Nullstellen hat  $B$ ?

- 4) a) Bestimmen Sie eine ganze Funktion  $f$  mit einfachen Nullstellen in den negativen ganzen Zahlen, die keine weiteren Nullstellen besitzt.  
b) Bestimmen Sie eine ganze Funktion  $f$  mit einfachen Nullstellen in den Stellen  $n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , die keine weiteren Nullstellen besitzt.  
c) Bestimmen Sie eine ganze Funktion  $f$  mit einfachen Nullstellen in den Stellen  $\pm n^{1/4}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , die keine weiteren Nullstellen besitzt.

*Bemerkung:* Wählen Sie die benötigten konvergenzerzeugenden Faktoren jeweils möglichst einfach und geben Sie das Geschlecht der entsprechenden kanonischen Produkte an.