Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Christopher Classen

Dortmund, 6. Juli 2015

Funktionentheorie I

12. Übungsblatt, SoSe 2015

Abgabe bis Montag, 13.07.2015, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 30 im Foyer

1) Es sei $\lambda > 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $\lambda - z - e^{-z} = 0$ genau eine Lösung in der rechten Halbebene $\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \}$ besitzt. Was passiert mit dieser Lösung, wenn $\lambda \to 1$?

2) Es sei S die Menge aller konformen Abbildungen f von $\mathbb{D}$ auf $f(\mathbb{D})$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Zeigen Sie, dass S eine bezüglich der lokal gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossene Menge in $H(\mathbb{D})$ ist, d.h. für die Grenzfunktion f jeder in $\mathbb{D}$ lokal gleichmäßig konvergenten Folge (f_n) in S gilt $f \in S$.

3) Es sei f eine konforme Abbildung von $\mathbb{D}$ auf $f(\mathbb{D})$ mit $f(0) = 0$ und es gebe ein $\delta > 0$ mit $|f'(z)| \geq \delta$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Zeigen Sie, dass dann $f(\mathbb{D}) \supset U_\delta(0)$. Geben Sie ein Beispiel einer solchen Funktion f an mit $f(\mathbb{D}) = U_\delta(0)$.

4) Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ konvergent. Zeigen Sie: Das unendliche Produkt $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$ konvergiert genau dann, wenn die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.

   Hinweis: Zeigen Sie dazu zunächst folgenden Satz: Das unendliche Produkt $\prod_{n=0}^{\infty} (1+a_n)$ mit $1 + a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist konvergent genau dann, wenn die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \log(1 + a_n)$ konvergiert, wobei log der Hauptzweig des Logarithmus ist, d.h. $\log 1 = 0$.