Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Christopher Classen

Dortmund, 29. Juni 2015

# Funktionentheorie I

11. Übungsblatt, SoSe 2015

**Abgabe** bis Montag, 06.07.2015, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 30 im Foyer

1) Berechnen Sie die folgenden Integrale

   a) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{a+\cos t}$ für $a > 1$,

   b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$,

   c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$.

2) Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ das Integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}\,.$$

   Betrachten Sie dazu für $r > 1$ den Integrationsweg $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, wobei $\gamma_1$ die Strecke von 0 nach $r$ auf der reellen Achse, $\gamma_2$ der Kreisbogen vom Radius $r$ um 0 von $r$ nach $re^{2\pi i/n}$ und $\gamma_3$ die Strecke von $re^{2\pi i/n}$ nach 0 ist. Wenden Sie dann den Residuensatz an.

3) a) Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $f$ holomorph in $\dot{U}_r(z_0)$ mit einem Pol der Ordnung 1 in $z_0$ und $g$ holomorph in $U_r(z_0)$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Res}(fg, z_0) = g(z_0)\operatorname{Res}(f, z_0)$.

   b) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f$ meromorph in $D$ mit endlich vielen Polen $a_1, \ldots, a_n$ der Ordnung 1 in $D$ und $g$ holomorph in $D$. Weiterhin sei $\gamma$ ein nullhomologer Zyklus modulo $D$ mit $|\gamma| \cap \{a_1, \ldots, a_n\} = \emptyset$. Zeigen Sie

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)g(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} n(\gamma, a_k)g(a_k)\operatorname{Res}(f, a_k)\,.$$

4) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{\mathbb{D}} \subset D$, $f$ holomorph in $D$ und $|f(z)| < 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$.

   a) Finden Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Lösungen (mit Vielfachheit gezählt) der Gleichung $f(z) = z^n$ in $\mathbb{D}$.

   b) Zeigen Sie, dass $f$ in $\mathbb{D}$ genau einen Fixpunkt besitzt.