Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Christopher Classen

Dortmund, 22. Juni 2015

Funktionentheorie I

10. Übungsblatt, SoSe 2015

Abgabe bis Montag, 29.06.2015, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 30 im Foyer

1) Bestimmen Sie die Residuen in den isolierten Singularitäten der Funktionen aus Aufgabe 1 auf Blatt 9.

2) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{\pm 2, -1\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) := \frac{12z - 3z^2}{(z^2-4)(z+1)}\,.$$

Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklungen von f in den Kreisringen $A(0;1,2)$, $A(0;2,\infty)$ und $A(-1;0,1)$.

3) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine in D holomorphe Funktion.

   a) Zeigen Sie, dass für jedes $\zeta \in D$ gilt

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|f^{(k)}(\zeta)|}{k!}} < \infty\,.$$

   b) Welche genauere Aussage gilt, wenn $D = \mathbb{C}$, d.h. wenn f eine ganze Funktion ist?

4) a) Wir bezeichnen mit $A(\overline{\mathbb{D}})$ die Menge aller Funktionen $f\colon \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, die auf $\overline{\mathbb{D}}$ stetig und in $\mathbb{D}$ holomorph sind. Es sei $f\colon \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und es gebe eine Folge (f_n) in $A(\overline{\mathbb{D}})$, die auf $\partial\mathbb{D}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Zeigen Sie, dass f zu einer Funktion $F \in A(\overline{\mathbb{D}})$ fortgesetzt werden kann, d.h. $F(\zeta) = f(\zeta)$ für alle $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.

   b) Es sei D ein m-fach zusammenhängendes Gebiet mit $m \geq 2$, $A_1, \ldots, A_{m-1}$ die beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ und $G := D \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{m-1}$ (dann ist $G \supset D$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet). Weiterhin sei f holomorph in D und es gebe eine Folge (f_n) holomorpher Funktionen in G, die in D lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Zeigen Sie, dass f zu einer in G holomorphen Funktion F fortgesetzt werden kann, d.h. $F(z) = f(z)$ für alle $z \in D$.