Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Christopher Classen

Dortmund, 15. Juni 2015

Funktionentheorie I

9. Übungsblatt, SoSe 2015

Abgabe bis Montag, 22.06.2015, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 30 im Foyer

1) Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen f und jeweils den Typ der Singularität. Bestimmen Sie bei Polen auch den Hauptteil und bei hebbaren Singularitäten von f in z_0 auch den Grenzwert $\lim_{z\to z_0} f(z)$.

   (a) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$, (b) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$, (c) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z(z-1)}$,

   (d) $f(z) = \dfrac{1}{1-e^{2\pi i z}}$, (e) $f(z) = z^n \sin\dfrac{1}{z}$, (f) $f(z) = \cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$.

2) a) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen, die in ∞ eine hebbare Singularität besitzen.

   b) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen, die in ∞ einen Pol der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ besitzen.

   c) Bestimmen Sie alle in $\widehat{\mathbb{C}}$ meromorphen Funktionen. Welche davon besitzen in ∞ eine hebbare Singularität?

3) Es seien $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und f eine meromorphe Funktion in $\dot{U}_r(a)$ mit unendlich vielen Polen, deren einziger Häufungspunkt der Punkt a ist. Zeigen Sie, dass es zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine Folge (z_n) in $\dot{U}_r(a)$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$.

4) Es sei p ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ und $R > 0$ so groß, dass $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)}\, dz = 2\pi i n\,.$$