Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Christopher Classen

Dortmund, 8. Juni 2015

# Funktionentheorie I

8. Übungsblatt, SoSe 2015

**Abgabe** bis Montag, 15.06.2015, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 30 im Foyer

1) Gibt es ein Polynom $P$, sodass $\left|P(z) - \frac{1}{z}\right| < 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$?

2) Gibt es eine in $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion $f$ mit $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ und $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$?

3) Es sei $f$ eine nicht konstante holomorphe Funktion in $\mathbb{D}$ und $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Zeigen Sie:

   a) $\operatorname{Re} f(z) > 0$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

   b) Ist $f(0) = 1$, so gilt
   $$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$
   für alle $z \in \mathbb{D}$.

4) a) Es seien $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{D}$ paarweise verschieden, $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ und
   $$B(z) := \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}\right)^{k_j}, \quad z \in \overline{\mathbb{D}}.$$
   Zeigen Sie, dass $B$ stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und holomorph in $\mathbb{D}$ ist. Zeigen Sie weiterhin, dass $|B(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$ und $|B(z)| = 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$.

   b) Bestimmen Sie alle Funktionen $f$ mit folgenden Eigenschaften: $f$ ist stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$, holomorph in $\mathbb{D}$, nullstellenfrei in $\mathbb{D}$ und $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$.

   c) Bestimmen Sie alle Funktionen $f$ mit folgenden Eigenschaften: $f$ ist stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$, holomorph in $\mathbb{D}$ und $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$.

   d) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen $f$ mit $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$.