Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Christopher Classen

Dortmund, 1. Juni 2015

Funktionentheorie I

7. Übungsblatt, SoSe 2015

Abgabe bis Montag, 08.06.2015, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 30 im Foyer

1) Es sei D das Gebiet im ersten Quadranten, das berandet wird von der positiven reellen Achse, dem Teil der ersten Winkelhalbierenden von 0 nach $1+i$ und dem Teil der Hyperbel $xy = 1$ mit $x \geq 1$. Konstruieren Sie eine konforme Abbildung von D auf den Einheitskreis $\mathbb{D}$.

2) Es sei f eine ganze Funktion. Zeigen Sie:

   a) Sind $a \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$ und gilt $|f(z) - a| \geq \delta$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

   b) Ist f nicht konstant, so ist $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$.

   c) Sind A, B, $s \geq 0$ und gilt $|f(z)| \leq A + B|z|^s$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f ein Polynom vom Grad höchstens $[s]$.

      Analysieren Sie Ihren Beweis und untersuchen Sie, ob man die Voraussetzungen dieses Ergebnisses abschwächen kann.

3) a) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f mit der Eigenschaft, dass $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   b) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f mit der Eigenschaft, dass $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   c) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f mit der Eigenschaft, dass $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

4) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f mit der Eigenschaft, dass $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Versuchen Sie, das Ergebnis zu verallgemeinern.