Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Christopher Classen

Dortmund, 11. Mai 2015

Funktionentheorie I

5. Übungsblatt, SoSe 2015

Abgabe bis Montag, 18.05.15, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 30 im Foyer

1) Es seien $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ und $S(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ Möbius-Transformationen. Zeigen Sie, dass $T = S$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt mit $\alpha = \lambda a$, $\beta = \lambda b$, $\gamma = \lambda c$, $\delta = \lambda d$.

2) a) Es seien $GL(2, \mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren (2×2)-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{C}$ (general linear group) und $\mathscr{M}$ die Möbius-Gruppe. Wir definieren eine Abbildung $\varphi\colon GL(2, \mathbb{C}) \to \mathscr{M}$ durch

$$\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = T\,, \quad T(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,.$$

Zeigen Sie, dass φ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist und bestimmen Sie den Kern von φ.

b) Es sei $SL(2, \mathbb{C})$ die Untergruppe von $GL(2, \mathbb{C})$, die aus allen (2×2)-Matrizen mit Determinante 1 besteht (special linear group). Zeigen Sie, dass das Bild von $SL(2, \mathbb{C})$ unter φ gleich $\mathscr{M}$ ist. Welcher Teil des Kerns von φ liegt in $SL(2, \mathbb{C})$?

c) Zeigen Sie, dass $\mathscr{M}$ eine einfache Gruppe ist.

Hinweise: Sind G bzw. H Gruppen mit Verknüpfungen $\circ$ bzw. $\diamond$, so heißt eine Abbildung $\varphi\colon G \to H$ ein *Gruppenhomomorphismus*, wenn für alle $x, y \in G$ gilt $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \diamond \varphi(y)$. Der *Kern* von φ ist die Menge $\ker \varphi = \{\, x \in G : \varphi(x) = e_H \,\}$, wobei e_H das neutrale Element in H ist.

Ist G eine Gruppe, so heißt eine Untergruppe N von G ein *Normalteiler* (oder *normale Untergruppe*) von G, wenn für alle $x \in G$ und $y \in N$ gilt $x^{-1}yx \in N$. G heißt eine *einfache Gruppe*, wenn für jeden Normalteiler N von G gilt $N = G$ oder $N = \{e\}$, wobei e das neutrale Element von G ist.

3) Zeigen Sie: Für die Möbius-Transformation $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ gilt $T(\widehat{\mathbb{R}}) = \widehat{\mathbb{R}}$ genau dann, wenn a, b, c, d reell gewählt werden können.

4) Zeigen Sie, dass die Definition der Symmetrie (Definition 2.4.1) unabhängig von der Wahl der Punkte z_1, z_2, z_3 ist, d.h. sind w_1, w_2, w_3 ebenfalls Punkte auf K, so gilt $(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$ genau dann, wenn $(z^*, w_1, w_2, w_3) = \overline{(z, w_1, w_2, w_3)}$.