TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. RAINER BRÜCK
DIPL.-MATH. CHRISTOPHER CLASSEN

Dortmund, 4. Mai 2015

# Funktionentheorie I

4. Übungsblatt, SoSe 2015

**Abgabe** bis Montag, 11.05.15, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 30 im Foyer

1) Es sei $\sigma\colon \mathbb{S}^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ die stereografische Projektion und $\sigma^{-1}\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^2$ die Umkehrabbildung.

   a) Bestimmen Sie die Bilder von $0,\ 1+i,\ 3+2i \in \mathbb{C}$ unter $\sigma^{-1}$ auf $\mathbb{S}^2$.

   b) Bestimmen Sie die Bilder von Geraden durch 0 und von Kreisen (Kreislinien) um 0 in $\mathbb{C}$ unter $\sigma^{-1}$ auf $\mathbb{S}^2$.

   c) Bestimmen Sie das Bild der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \,\}$ unter $\sigma^{-1}$ auf $\mathbb{S}^2$.

2) Es sei $K$ ein Kreis (gemeint ist eine Kreislinie) auf $\mathbb{S}^2$. Dann gibt es eine Ebene $E$ in $\mathbb{R}^3$ mit $E \cap \mathbb{S}^2 = K$. Aus der Linearen Algebra bzw. Analytischen Geometrie ist bekannt, dass

$$E = \{\, (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 = c \,\}$$

   wobei $(a_1, a_2, a_3)$ ein Normalenvektor von $E$ ist und $c \in \mathbb{R}$. Man kann annehmen, dass $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Benutzen Sie diese Informationen, um zu zeigen, dass das Bild von $K$ unter der stereografischen Projektion $\sigma$ eine Gerade ist, falls $N \in K$ und ein Kreis ist, falls $N \notin K$.

3) Es sei $\xi \in \mathbb{S}^2$ und $z = \sigma(\xi)$. Drücken Sie den Antipodenpunkt $-\xi$ mit Hilfe von $z$ aus.

4) Verifizieren Sie die Formel für die chordale Metrik $\chi$ auf $\widehat{\mathbb{C}}$.