Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 13. April 2015

Funktionentheorie I

1. Übungsblatt, SoSe 2015

1) a) Untersuchen Sie, in welchen $z \in \mathbb{C}$ die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := z \operatorname{Re} z$ komplex differenzierbar ist.

   b) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f der Form $f(z) = u(x) + iv(y)$, wobei $z = x + iy$ und u, $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind.

2) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f holomorph in D. Die Funktion $\bar{f}$ sei definiert durch $\bar{f}(z) := \overline{f(z)}$ für $z \in D$ und $\bar{f}$ sei ebenfalls holomorph in D. Zeigen Sie, dass dann f konstant ist.

3) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f holomorph in D und $|f|$ sei konstant in D. Zeigen Sie, dass dann auch f konstant in D ist.

   Hinweis: Schreiben Sie $\bar{f} = \frac{|f|^2}{f}$.

4) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f holomorph in D. Weiter sei $D^* := \{\, z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in D \,\}$ und $f^*\colon D^* \to \mathbb{C}$ definiert durch $f^*(z) := \overline{f(\bar{z})}$ für $z \in D^*$. Zeigen Sie, dass f^* holomorph in D^* ist und $(f^*)'(z) = \overline{f'(\bar{z})}$ für $z \in D^*$.