Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

SoSe 2015

Funktionentheorie I

Beweis des Mittag-Lefflerschen Teilbruchsatzes

Ist A eine endliche Menge, so ist die Aussage offensichtlich richtig, denn dann addiert man einfach die endlich vielen Hauptteile. Wir nehmen also an, dass A eine unendliche Menge ist.

Weiter können wir annehmen, dass $0 \notin A$, denn andernfalls lösen wir das Problem für die Menge $A \setminus \{0\}$ und addieren dann den Hauptteil um 0. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $\delta_n := \operatorname{dist}(a_n, \mathbb{C} \setminus D)$ und unterscheiden drei Fälle.

Fall 1: Es gelte $|a_n|\delta_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hierin ist der Fall $D = \mathbb{C}$ enthalten, denn dann ist $\delta_n = \infty$ und wegen $|a_n| \neq 0$ ist obige Voraussetzung erfüllt.

Wir zeigen zunächst, dass $|a_n| \to \infty$ $(n \to \infty)$. (Dies bedeutet insbesondere, dass D unbeschränkt ist.) Nehmen wir an, dass dies nicht gilt, so gibt es eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) die gegen ein $a \in \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist a ein Häufungspunkt von (a_n). Ist $D = \mathbb{C}$, so haben wir sofort einen Widerspruch. Es sei also $D \neq \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus D$. Dann gilt nach Voraussetzung für $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n - z| \geq \delta_n \geq \frac{1}{|a_n|}$$

und daher

$$|a - z| = \lim_{k\to\infty} |a_{n_k} - z| \geq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|a_{n_k}|} = \frac{1}{|a|}\,.$$

Hieraus folgt $a \neq 0$ und $a \in D$ (da dies für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D$ gilt), was ein Widerspruch ist.

Die rationale Funktion R_n ist holomorph in $D_n := U_{|a_n|}(0)$ und kann daher als Potenzreihe um 0 dargestellt werden, d.h.

$$R_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} z^k\,, \quad z \in D_n\,.$$

Hieraus folgt

$$\sum_{k=0}^{d} a_{nk} z^k \to R_n(z) \quad (d \to \infty)$$

gleichmäßig in $K_n := \overline{U_{|a_n|/2}(0)}$. Daher gibt es einen Index $d(n) \in \mathbb{N}$, sodass für das Polynom

$$P_n(z) := \sum_{k=0}^{d(n)} a_{nk} z^k$$

gilt

$$|R_n(z) - P_n(z)| < 2^{-n}, \quad z \in K_n .$$

Wir zeigen nun, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(R_n - P_n)$$

absolut und lokal gleichmäßig in $\mathbb{C}$ konvergiert. Dazu genügt es, zu zeigen, dass für jedes $r > 0$ die Reihe auf $K := \overline{U_r(0)}$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Wegen $|a_n| \to \infty$ finden wir ein N, sodass $\overline{U_r(0)} \subset K_n$ für jedes $n > N$. Für $n > N$ liegt der Pol a_n von $R_n - P_n$ außerhalb von K. Ebenso gilt die Abschätzung $|R_n(z) - P_n(z)| < 2^{-n}$ für alle $z \in K$. Nun folgt die Behauptung aus dem Weierstraß-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz.

Nun definieren wir

$$f := \sum_{n=1}^{\infty}(R_n - P_n) .$$

Dann ist f meromorph in $\mathbb{C}$ und hat die gewünschten Eigenschaften.

Fall 2: Es gelte $|a_n|\delta_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen zunächst, dass $\delta_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Nehmen wir an, dass dies nicht gilt, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge (δ_{n_k}) von (δ_n) mit $\delta_{n_k} \geq \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daher gilt $|a_{n_k}| < \delta_{n_k}^{-1} \leq \varepsilon^{-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge (a_{n_k}) ist beschränkt und besitzt daher einen Häufungspunkt $a \in \mathbb{C}$. Wir können annehmen, dass (a_{n_k}) gegen a konvergiert. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus D$ gilt

$$|a_{n_k} - z| \geq \delta_{n_k} \geq \varepsilon$$

und daher

$$|a - z| = \lim_{k\to\infty} |a_{n_k} - z| \geq \varepsilon > 0 .$$

Hieraus folgt $a \in D$, was ein Widerspruch ist.

Wegen $\delta_n < \infty$ gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\zeta_n \in \partial D$ mit $|\zeta_n - a_n| = \delta_n$. Wir setzen noch $D_n := \{\, z \in \mathbb{C} : |z - \zeta_n| > \delta_n \,\}$. Für $z \in D_n$ gilt

$$\frac{1}{z - a_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_n - \zeta_n)^{k-1}}{(z - \zeta_n)^k} .$$

Durch Differentiation erhält man entsprechende Entwicklungen für $1/(z - a_n)^j$ in D_n. Setzt man diese Entwicklungen in die Darstellung von R_n ein, so erhält man

$$R_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{(z - \zeta_n)^k}, \quad z \in D_n .$$

Diese Reihe konvergiert gleichmäßig in $A_n := \{\, z \in \mathbb{C} : |z - \zeta_n| \geq 2\delta_n \,\}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ können wir also ein $d(n) \in \mathbb{N}$ wählen, sodass für die rationale Funktion

$$S_n(z) := \sum_{k=1}^{d(n)} \frac{a_{nk}}{(z - \zeta_n)^k}$$

gilt

$$|R_n(z) - S_n(z)| < 2^{-n}\,, \quad z \in A_n\,.$$

Es ist S_n holomorph in D, da der einzige Pol ζ_n in ∂D liegt.

Wir zeigen nun, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(R_n - S_n)$$

absolut und lokal gleichmäßig in D konvergiert. Dazu genügt es, zu zeigen, dass für jedes $z_0 \in D$ und $r > 0$ mit $\overline{U_r(z_0)} \subset D$ die Reihe auf $K := \overline{U_r(z_0)}$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Die Pole von $R_n - S_n$ (nämlich a_n und ζ_n) liegen nicht in A_n. Wegen $\delta_n \to 0$ $(n \to \infty)$ finden wir ein N, sodass $\overline{U_r(z_0)} \subset A_n$ für jedes $n > N$. Für $n > N$ gilt die Abschätzung $|R_n(z) - S_n(z)| < 2^{-n}$ für alle $z \in K$. Nun folgt die Behauptung aus dem Weierstraß-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz.

Nun definieren wir

$$f := \sum_{n=1}^{\infty}(R_n - S_n)\,.$$

Dann ist f meromorph in D und hat die gewünschten Eigenschaften.

Fall 3: Es liegt weder Fall 1 noch Fall 2 vor. Dann setzen wir $J := \{\, n \in \mathbb{N} : |a_n|\delta_n \geq 1\,\}$, $A_1 := \{\, a_n : n \in J\,\}$ und $A_2 := A \setminus A_1$. Dann sind A_1, A_2 nicht leer, disjunkt und $A_1 \cup A_2 = A$. Es ist A_1 entweder eine endliche Menge oder eine Menge auf die Fall 1 zutrifft. Entsprechendes gilt für A_2 und Fall 2. Für $j \in \{1, 2\}$ können wir also meromorphe Funktionen in D finden mit Polen genau in den Punkten von A_j. Die Funktion $f := f_1 + f_2$ hat dann die gewünschten Eigenschaften.