Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 16. Juli 2014

Funktionalanalysis II

13. Übungsblatt, SoSe 2014

1) Zeigen Sie, dass es keine Metrik gibt, die die Topologie von $\mathscr{D}(\Omega)$ induziert.
   Gehen Sie dazu wie folgt vor:
   (i) Zeigen Sie, dass $\mathscr{D}(\Omega)$ von 1. Kategorie in sich ist.
   (ii) Nehmen Sie an, dass die Topologie von $\mathscr{D}(\Omega)$ von einer Metrik induziert wird und zeigen Sie, dass diese Metrik vollständig sein müsste.
   (iii) Wenden Sie den Baireschen Kategoriesatz an.

2) Untersuchen Sie, welche der folgenden linearen Funktionale Distributionen in Ω sind.
   a) $\Omega = (0,\infty)$, $\Phi(\varphi) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)$. Gibt es eine Distribution $\Psi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ mit $\Psi_{|\mathcal{D}(0,\infty)} = \Phi$?
   b) $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\Phi(\varphi) := \displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(\cos t, \sin t)\, dt$.

3) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := -\frac{1}{4\pi}\,\|x\|_2^{-1}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $f \in L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}^3)$ und $\Delta f = \delta$ im Distributionssinne, wobei $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ der Laplaceoperator ist.
   Hinweis: Verwenden Sie die zweite Greensche Formel.
   $$\int_G [f\Delta\varphi - \varphi\Delta f]\, d\lambda_3 = \int_{\partial G} [f\langle \operatorname{grad}\varphi, \mathfrak{n}\rangle - \varphi\langle \operatorname{grad} f, \mathfrak{n}\rangle]\, do$$
   mit einem geeigneten Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$, wobei $\mathfrak{n}$ der äußere Normalenvektor und do das Oberflächenmaß auf ∂G ist.

4) a) Es sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$ und $f_n(x) := nf(nx)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $f_n \to \delta$ $(n \to \infty)$ im Distributionssinne.
   b) Zeigen Sie, dass die Grenzwerte
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}}\, e^{-nx^2}\,, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\, \frac{n}{1+n^2x^2}\,, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\, \frac{\sin nx}{x}\,, \quad \lim_{n\to\infty} \sin nx$$
   im Distributionssinne existieren und berechnen Sie diese.