Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 9. Juli 2014

Funktionalanalysis II

12. Übungsblatt, SoSe 2014

1) Wir betrachten die so genannte Diskalgebra $A(\overline{\mathbb{D}})$ (vgl. Beispiel 6.1.3 (2)).

   a) Für $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$ und $0 < r < 1$ definieren wir $f_r(z) := f(rz)$. Zeigen Sie, dass $f_r \in A(\overline{\mathbb{D}})$ und $f_r(z) \to f(z)$ $(r \to 1)$ gleichmäßig auf $\overline{\mathbb{D}}$.

   b) Zeigen Sie: Die Menge $\mathscr{F}$ aller Funktionen $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$, die in einem (von f abhängigen) Gebiet $G_f \supset \overline{\mathbb{D}}$ holomorph sind, ist eine dichte Unteralgebra von $A(\overline{\mathbb{D}})$.

   c) Zeigen Sie: Für $z \in \overline{\mathbb{D}}$ ist die Abbildung $\phi_z\colon A(\overline{\mathbb{D}}) \to \mathbb{C}$ mit $\phi_z(f) = f(z)$ ein komplexer Homomorphismus.

   d) Zeigen Sie: Jeder komplexe Homomorphismus $\phi \neq 0$ auf $A(\overline{\mathbb{D}})$ ist von der Form ϕ_z für ein $z \in \overline{\mathbb{D}}$ und $\Delta(A(\overline{\mathbb{D}}))$ ist homöomorph zu $\overline{\mathbb{D}}$.

      Hinweis: Betrachten Sie die identische Funktion $\mathrm{id}\colon \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ und setzen Sie $z_0 := \phi(\mathrm{id})$. Zeigen Sie dann zuerst $\phi = \phi_{z_0}$ auf $\mathscr{F}$; betrachten Sie dazu die Potenzreihenentwicklung von $f \in \mathscr{F}$ um 0.

   e) Beschreiben Sie die Gelfandtransformation auf $A(\overline{\mathbb{D}})$

2) Es sei A der Raum aller komplexen Folgen $x = (x_n)$ mit $\|x\| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| e^{-n^2} < \infty$. Weiterhin sei auf A die Faltung $*$ mit

$$(x * y)_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$$

   als Multiplikation definiert. Zeigen Sie:

   a) Es ist $(A, *, \|\cdot\|)$ eine kommutative Banachalgebra mit Einselement.

   b) Die Menge $J = \{\, x = (x_n) \in A : x_0 = 0 \,\}$ ist ein maximales Ideal in A, und jedes $x \in J$ hat den Spektralradius $r(x) = 0$.

   c) Für $x = (x_n) \in A$ ist $\sigma(x) = \{x_0\}$.

   d) Die Gelfandtransformation verschwindet auf J und ist daher nicht injektiv.

3) Es sei $CB(0,1]$ der Banachraum aller beschränkten, stetigen Funktionen $f\colon (0,1] \to \mathbb{C}$ mit der Supremumnorm (vgl. Beispiel 1.7.2). Zeigen Sie, dass ein kompakter Hausdorffraum K existiert, sodass $CB(0,1]$ isometrisch isomorph zu $C(K)$ ist. Kann man $K = [0,1]$ wählen?