Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 2. Juli 2014

Funktionalanalysis II

11. Übungsblatt, SoSe 2014

1) Es sei A eine kommutative Banachalgebra mit Einselement und J ein Ideal in A. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   a) Ist J ein echtes Ideal, so ist $J \cap \mathscr{G}(A) = \emptyset$.

   b) Es ist $\overline{J}$ ein Ideal in A.

2) Beweisen Sie das Lemma von Ehrling.

   Es seien E, F, G Banachräume, $T \in K(E,F)$ und $J \in L(F,G)$ injektiv. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C_\varepsilon > 0$ mit

   $$\|Tx\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E + C_\varepsilon \|JTx\|_G$$

   für alle $x \in E$.

   Hinweis: Führen Sie den Beweis indirekt.

3) Es sei $\phi \in (\ell^\infty)'$. Zeigen Sie, dass ϕ in eindeutiger Weise als Summe zweier Funktionale ϕ_1, ϕ_2 geschrieben werden kann, wobei $\phi_1((s_n)) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n t_n$ mit einer geeigneten Folge $(t_n) \in \ell^1$ und $\phi_{2|c_0} = 0$. Zeigen Sie, dass dann $\|\phi\| = \|\phi_1\| + \|\phi_2\|$ gilt. Folgern Sie, dass jedes stetige lineare Funktional auf c_0 eindeutig zu einem normgleichen Funktional auf ℓ^∞ fortgesetzt werden kann.

   Hinweise: (1) Betrachten Sie $\phi(e^n)$, wobei e^n den n-ten Einheitsvektor in ℓ^∞ bezeichnet. (2) Wählen Sie x, $y \in \ell^\infty$ mit $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$, sodass $\phi_1(x) \approx \|\phi_1\|$ und $\phi_2(y) \approx \|\phi_2\|$. Für $N \in \mathbb{N}$ sei $z = (z_n)$ die Folge mit $z_n = x_n$ für $n \leq N$ und $z_n = y_n$ für $n > N$. Zeigen Sie, dass dann für geeignetes N gilt $\phi(z) \approx \|\phi_1\| + \|\phi_2\|$.

4) Es sei E ein Banachraum. Zeigen Sie, dass $\overline{F(E, C[0,1])} = K(E, C[0,1])$.

   Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $Z_n := \left\{ t_{j,n} := \frac{j}{n} : j = 0, 1, \ldots, n \right\}$ und für $f \in C[0,1]$ sei $S_n f \in C[0,1]$ definiert durch $(S_n f)(t_{jn}) = f(t_{jn})$ und $S_n f$ linear in den Intervallen $[t_{j-1,n}, t_{j,n}]$ für $j = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie dann, dass $S_n \in L(C[0,1])$, $\dim \mathscr{R}(S_n) = n + 1$ und die Folge $(S_n f)$ gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f konvergiert. Beachten Sie schließlich Aufgabe 3 auf Blatt 8.