Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 25. Juni 2014

Funktionalanalysis II

10. Übungsblatt, SoSe 2014

1) a) Es seien $X = \{0, 1\}$, $\mathscr{A} := \mathscr{P}(X)$ und $\mu \colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$ definiert durch $\mu(\emptyset) := 0$, $\mu(\{0\}) := 1$ und $\mu(\{1\}) := \mu(X) := \infty$. Zeigen Sie, dass $(L^1(\mu))'$ und $L^\infty(\mu)$ nicht isometrisch isomorph sind. Was ändert sich, wenn man $\mu(\{0\}) := 0$ setzt?

   b) Es sei $X = [0, 1]$, $\mathscr{A} := \{\, A \subset X : A \text{ oder } X \setminus A \text{ sind höchstens abzählbar} \,\}$ und μ das Zählmaß auf $\mathscr{A}$. Zeigen Sie, dass der Darstellungssatz 7.1.2 für $(L^1(\mu))'$ nicht gilt. Betrachten Sie dazu das lineare Funktional Φ auf $L^1(\mu)$ mit

$$\Phi(f) := \int_0^1 t f(t)\, d\mu(t)\,, \quad f \in L^1(\mu)$$

   und zeigen Sie zunächst, dass Φ wohldefiniert und stetig ist. Überlegen Sie dazu, unter welchen Voraussetzungen eine Funktion $f \colon X \to \mathbb{C}$ messbar ist.

2) Es sei ϕ das stetige lineare Funktional auf $C[0, 1]$ definiert durch $\phi(f) := f(0)$ für $f \in C[0, 1]$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine Fortsetzung Φ von ϕ auf $L^\infty[0, 1]$ mit $\|\Phi\| = \|\phi\|$. Zeigen Sie, dass es kein $g \in L^1[0, 1]$ gibt mit

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt \quad \text{für alle } f \in L^\infty[0, 1]\,.$$

   Dieses Beispiel zeigt, dass Satz 7.1.2 für $p = \infty$ im Allgemeinen nicht gilt.

3) a) Zeigen Sie, dass die Räume $L^p(\mu)$ für $1 < p < \infty$ und jedes σ-endliche Maß μ reflexiv sind. Insbesondere sind die Räume ℓ^p für $1 < p < \infty$ reflexiv.

   b) Zeigen Sie, dass die Räume $L^1(\mu)$ und $L^\infty(\mu)$ nicht reflexiv sind, falls μ ein σ-endliches Maß ist und $\dim L^1(\mu) = \dim L^\infty(\mu) = \infty$. Insbesondere sind die Räume ℓ^1 und ℓ^∞ nicht reflexiv.

4) Beweisen Sie folgende Version des Satzes von Hahn-Banach (vgl. Satz 2.5.10).

   Es sei E ein normierter Raum, E' strikt konvex, M ein Unterraum von E und $\phi \in M'$. Dann gibt es genau ein $\Phi \in E'$ mit $\Phi_{|M} = \phi$ und $\|\Phi\| = \|\phi\|$.

   Zur Definition der strikten Konvexität eines normierten Raumes siehe Aufgabe 4 auf Blatt 4.