Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 18. Juni 2014

Funktionalanalysis II

9. Übungsblatt, SoSe 2014

1) Es sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und Φ ein positives lineares Funktional auf $C_c(X)$.

   a) Zeigen Sie mit einem Gegenbeispiel, dass Φ im Allgemeinen nicht stetig sein muss.
   Hinweis: Wählen Sie $X := \mathbb{R}$ und

   $$\Phi(f) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx\,, \quad f \in C_c(\mathbb{R})\,.$$

   b) Zeigen Sie, dass Φ stetig ist, falls X kompakt ist. Berechnen Sie die Norm von Φ.

2) Beweisen Sie Satz 7.2.8: Es sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Dann ist $C_0(X)$ mit der Maximumnorm ein Banachraum und $C_c(X)$ dicht in $C_0(X)$.

3) Beweisen Sie den Rieszschen Darstellungssatz für $(C[0,1])'$: Jedes $\phi \in (C[0,1])'$ kann als Riemann-Stieltjes-Integral dargestellt werden, d.h. es gibt ein $g \in BV[0,1]$ (Raum der Funktionen von beschränkter Variation auf $[0,1]$) mit

   $$\phi(f) = \int_0^1 f(t)\,dg(t)\,, \quad f \in C[0,1]\,. \tag{$*$}$$

   Gehen Sie dabei wie folgt vor: Setzen Sie ϕ mit dem Satz von Hahn-Banach zu einem $\Phi \in (L^\infty[0,1])'$ fort, zeigen Sie $C[0,1] \subset \overline{\langle\, \chi_{[0,t]} : t \in [0,1]\,\rangle}$ und definieren Sie $g\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ durch $g(t) := \Phi(\chi_{[0,t]})$. Zeigen Sie nun $g \in BV[0,1]$ und beweisen Sie schließlich die Darstellung $(*)$.