Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 4. Juni 2014

Funktionalanalysis II

8. Übungsblatt, SoSe 2014

1) Es sei H ein Hilbertraum, $\{ e_n : n \in \mathbb{N} \}$ ein Orthonormalsystem, $(\lambda_n) \in \ell^\infty$ und $T\colon H \to H$ definiert durch
$$Tx := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n \,.$$
   a) Zeigen Sie, dass $T \in L(H)$ und T normal ist. Bestimmen Sie $\|T\|$.
   b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von T.
   c) Zeigen Sie, dass T kompakt ist genau dann, wenn $(\lambda_n) \in c_0$.

2) Es sei $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und $k_{|[0,2\pi]} \in L^2[0,2\pi]$. Wir betrachten den *Faltungsoperator*
$$(T_k f)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(x-t) f(t)\, dt \,.$$
   a) Zeigen Sie, dass $T_k \in K(L^2[0,2\pi])$ und T_k normal ist.
   b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von T_k, indem Sie k in eine Fourierreihe entwickeln.
   c) Bestimmen Sie die Spektralzerlegung von T_k gemäß Satz 8.2.11.

3) Es seien E ein Banachraum, G ein separabler Banachraum und (S_n) eine beschränkte Folge in $F(G)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} S_n y = y$ für alle $y \in F$. Zeigen Sie, dass dann $\overline{F(E,G)} = K(E,G)$.

   Analysieren Sie Ihren Beweis und prüfen Sie, ob man einige der obigen Voraussetzungen weglassen kann.

4) Es seien E ein beliebiger Banachraum und G einer der separablen Banachräume ℓ^p mit $1 \le p < \infty$ oder c_0. Zeigen Sie, dass dann $\overline{F(E,G)} = K(E,G)$.