Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 28. Mai 2014

Funktionalanalysis II

7. Übungsblatt, SoSe 2014

1) Wir betrachten die Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art

$$f(x) - \int_0^1 k(x,t) f(t)\, dt = g(x)\,, \quad x \in [0,1]\,,$$

wobei $k \in C([0,1]^2)$ und $g \in C[0,1]$. Weiter setzen wir voraus, dass

$$\sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,t)|\, dt < 1\,. \tag{$*$}$$

Zeigen Sie, dass diese Integralgleichung genau eine Lösung $f \in C[0,1]$ besitzt und versuchen Sie, die Lösung explizit darzustellen.

Anleitung: Schreiben Sie die Integralgleichung als Operatorgleichung mit einem Integraloperator T_k, benutzen Sie die Neumannsche Reihe und stellen Sie die iterierten Operatoren T_k^n als Integraloperatoren mit geeigneten Kernen dar.

2) Lösen Sie die Integralgleichung

$$f(x) - 2\int_0^1 xt f(t)\, dt = \sin \pi x\,, \quad x \in [0,1]$$

mit der in Aufgabe 1 entwickelten Methode.

Bemerkung: Die Voraussetzung $(*)$ ist in diesem Beispiel zwar nicht erfüllt, aber dennoch funktioniert die Methode. Begründen Sie, warum dies der Fall ist.

3) a) Es seien E, F Banachräume und $T \in L(E,F)$. Zeigen Sie: T ist ein kompakter Operator. $\iff$ Die Abbildung $T'_{|B_{F'}} \colon B_{F'} \to E'$ ist $\sigma(F',F)$-$\|\cdot\|$-stetig.

b) Es sei E ein separabler Banachraum und A eine schwach*-kompakte Teilmenge von E'. Zeigen Sie, dass $(A, \sigma(E',E))$ (linear-) homöomorph zu einer normkompakten Teilmenge eines Hilbertraums ist.

Hinweis: Es sei $\{\, y_n : n \in \mathbb{N} \,\}$ eine dichte Teilmenge von S_E (Einheitssphäre). Definieren Sie $T \colon \ell^2 \to E$ durch $Tx := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} y_n x_n$ für $x = (x_n) \in \ell^2$. Zeigen Sie, dass T kompakt ist und benutzen Sie Teil (a), um zu folgern, dass $(A, \sigma(E',E))$ und $(T'(A), \|\cdot\|_2)$ homöomorph sind.

4) Es sei $1 \le p \le \infty$. Zeigen Sie, dass der Banachraum $L(\ell^p)$ nicht separabel ist.

Hinweis: Definieren Sie für $y = (y_n) \in \ell^\infty$ die Abbildung $T_y \colon \ell^p \to \ell^p$ durch $T_y x := (y_n x_n)$ für $x = (x_n) \in \ell^p$ und zeigen Sie, dass $T_y \in L(\ell^p)$. Betrachten Sie dann die Abbildung $\Phi \colon \ell^\infty \to L(\ell^p)$ mit $\Phi y = T_y$ und zeigen Sie, dass Φ eine Isometrie ist.