Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 21. Mai 2014

Funktionalanalysis II

6. Übungsblatt, SoSe 2014

1) Es sei $T\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ definiert durch $Tf := f'$. Bestimmen Sie das Spektrum von T. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Satz 6.1.11.

   Bemerkung: Es ist zwar $L(C^\infty(\mathbb{R}))$ keine Banachalgebra sondern nur eine topologische Algebra, aber das Spektrum eines Operators kann ganz analog zu Definition 6.1.6 (2) erklärt werden.

2) Es seien $1 \le p \le \infty$, $a = (a_n) \in c_0$ und $T_a\colon \ell^p \to \ell^p$ definiert durch $T_a x := (a_n x_n)$ für $x = (x_n) \in \ell^p$. Zeigen Sie $T_a \in K(\ell^p)$.

3) Es seien $1 \le q \le \infty$ und $A = (a_{nk})$ eine unendliche Matrix komplexer Zahlen mit

$$\|A\|_q := \left(\sum_{n,k=1}^{\infty} |a_{nk}|^q \right)^{1/q} < \infty\,,\ q < \infty \quad \text{bzw.} \quad \|A\|_\infty := \sup_{n,k\in\mathbb{N}} |a_{nk}| < \infty\,,\ q = \infty\,.$$

   Geben Sie ein Beispiel einer solchen Matrix an.

   Für $1 \le p \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sei die *Matrixabbildung* $T_A\colon \ell^p \to \ell^q$ definiert durch

$$(T_A x)_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k\,, \quad x = (x_n) \in \ell^p\,.$$

   Zeigen Sie:

   a) T_A ist wohldefiniert (d.h. die Reihe ist absolut konvergent) und $T_A x \in \ell^q$.
   b) $T_A \in L(\ell^p, \ell^q)$ und $\|T_A\| \le \|A\|_q$.
   c) $T_A \in K(\ell^p, \ell^q)$, falls $q < \infty$. Gilt die Aussage auch für $q = \infty$?

4) Für $k \in C([0,1] \times [0,1])$ sei der *Integraloperator* $T_k\colon L^1[0,1] \to C[0,1]$ definiert durch

$$(T_k f)(t) := \int_0^1 k(t,x) f(x)\, dx\,, \quad f \in L^1[0,1]\,.$$

   Zeigen Sie:

   a) T_k ist wohldefiniert (d.h. das Integral existiert) und $T_k f \in C[0,1]$.
   b) $T_k \in L(L^1[0,1], C[0,1])$ und $\|T_k\| \le \|k\|_\infty$.
   c) $T_k \in K(L^1[0,1], C[0,1])$. Benutzen Sie dazu den Satz von Arzelà-Ascoli.
   d) Die entsprechenden Integraloperatoren $\widetilde{T}_k\colon C[0,1] \to C[0,1]$ und $\widehat{T}_k\colon L^1[0,1] \to L^1[0,1]$ sind ebenfalls kompakt. Benutzen Sie dazu (c) und Satz 6.2.2 (e).