Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 14. Mai 2014

Funktionalanalysis II

5. Übungsblatt, SoSe 2014

1) Es sei $K \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Menge. Zeigen Sie, dass es einen Operator $T \in L(\ell^2)$ gibt mit $\sigma(T) = K$.
   Hinweis: Definieren Sie T durch $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3, \dots)$ mit einer geeigneten Folge (a_n).

2) a) Es sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ hermitesch. Zeigen Sie, dass $\sigma_r(T) = \emptyset$.

   b) Es sei $E = C[0,1]$ und $T \in L(E)$ definiert durch
   $$(Tf)(x) := \int_0^x f(t)\,dt \quad (f \in E,\ x \in [0,1]) .$$
   Zeigen Sie, dass $\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}$.

   c) Es sei $E := \{\, f \in C[0,1] : f(0) = 0 \,\}$ und $T \in L(E)$ wie in (b) definiert. Zeigen Sie, dass $\sigma(T) = \sigma_c(T) = \{0\}$.

3) Es sei $B[0,1]$ der Banachraum aller beschränkten Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ mit der Supremumnorm und
   $$E := \{\, f \in B[0,1] : f \text{ stetig in } 0 \text{ und } 1,\ f(0) = 0 \,\} .$$
   Weiter sei $T \in L(E)$ definiert durch $(Tf)(x) := xf(x)$. Zeigen Sie, dass $\sigma_p(T) = (0,1)$, $\sigma_c(T) = \{0\}$ und $\sigma_r(T) = \{1\}$.

4) Für $1 \le p < \infty$ sei $T_p \in L(\ell^p)$ definiert durch $T_p(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots)$ für $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^p$. Bestimmen Sie das Spektrum von T_p sowie des dualen Operators $T_p' \in L(\ell^q)$. Welche Spektralwerte sind jeweils Eigenwerte?