Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 7. Mai 2014

Funktionalanalysis II

4. Übungsblatt, SoSe 2014

1) Es sei $K := \{ \Phi \in (\ell^\infty)' : \|\Phi\| \le 1 \}$. Zeigen Sie, dass K nicht schwach*-folgenkompakt ist.
Hinweis: Betrachten Sie dazu die Folge (Φ_n) in K mit $\Phi_n(x) := x_n$ für $x = (x_n) \in \ell^\infty$ und zeigen Sie, dass (Φ_n) keine schwach*-konvergente Teilfolge besitzt.

2) a) Es sei $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und konvex. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ex} K$ kompakt ist.
b) Zeigen Sie, dass die Aussage (a) in $\mathbb{R}^3$ im Allgemeinen falsch ist. Betrachten Sie dazu $K := \operatorname{co}(\{(1,0,1),(1,0,-1)\} \cup \{ (\cos t, \sin t, 0) : 0 \le t \le 2\pi \})$.

3) Es X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt *präkompakt* oder *total-beschränkt*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n \in M$ gibt mit $M \subset U_\varepsilon(x_1) \cup \cdots \cup U_\varepsilon(x_n)$. Diese Punkte und deren Anzahl hängen von ε ab. Die Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ heißt dann ein ε-Netz von M. Zeigen Sie:
a) Ist E ein normierter Raum und $N \subset E$ eine endliche Menge, so ist $\operatorname{co} N$ kompakt.
b) Ist E ein normierter Raum und $M \subset E$ präkompakt, so ist $\operatorname{co} M$ präkompakt.
c) Ist E ein Banachraum und $K \subset E$ präkompakt, so ist $\overline{\operatorname{co}}\, K$ kompakt.
d) Geben Sie ein Beispiel an, dass $\operatorname{co} K$ im Allgemeinen nicht abgeschlossen sein muss.

4) Es sei E ein normierter Raum, $B_E := \{ x \in E : \|x\| \le 1 \}$ die abgeschlossene Einheitskugel und $S_E := \{ x \in E : \|x\| = 1 \}$ die Einheitssphäre in E. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ex} B_E \subset S_E$. E heißt *strikt konvex*, falls $\operatorname{ex} B_E = S_E$. Zeigen Sie:
a) E ist strikt konvex. $\iff$ Für alle $x, y \in S_E$ mit $x \ne y$ gilt $\|x + y\| < 2$.
b) Jeder Hilbertraum H ist strikt konvex.
c) Die Räume $L^p(\mu)$ mit $1 < p < \infty$ sind strikt konvex.
d) Die Räume $C[0,1]$, $L^1[0,1]$, c_0, ℓ^1 und ℓ^∞ sind nicht strikt konvex. Genauer gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ex} B_{C[0,1]} &= \{ f : |f(t)| = 1 \ \forall\, t \in [0,1] \}\,, \\
\operatorname{ex} B_{L^1[0,1]} &= \operatorname{ex} B_{c_0} = \emptyset\,, \\
\operatorname{ex} B_{\ell^1} &= \{ \alpha e^{(n)} : \alpha \in \mathbb{C},\ |\alpha| = 1,\ n \in \mathbb{N} \}\,, \\
\operatorname{ex} B_{\ell^\infty} &= \{ x = (x_n) : |x_n| = 1 \ \forall\, n \in \mathbb{N} \}\,.
\end{aligned}$$