Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 30. April 2014

Funktionalanalysis II

3. Übungsblatt, SoSe 2014

1) a) Es sei E ein normierter Raum mit $\dim E = \infty$, $K := \{ x \in E : \|x\| \le 1 \}$ die abgeschlossene Einheitskugel in E und $S := \{ x \in E : \|x\| = 1 \}$ die Einheitssphäre in E. Zeigen Sie, dass S schwach dicht in K ist.
Hinweis: Verwenden Sie Satz 5.2.5.

   b) Es seien E, F lokalkonvexe topologische Vektorräume, und $T \in L(E, F)$. Zeigen Sie, dass T auch $\sigma(E, E')$-$\sigma(F, F')$-stetig ist.

2) Es sei $E = c_0$ oder $E = C[0, 1]$ und $K := \{ x \in E : \|x\|_\infty \le 1 \}$ die abgeschlossene Einheitskugel in E. Zeigen Sie, dass K nicht schwach kompakt ist.
Hinweis: Führen Sie den Beweis indirekt und verwenden Sie Aufgabe 2 auf Blatt 12 (Funktionalanalysis I).

3) Es sei E ein Vektorraum, $\widetilde{E}$ ein Unterraum von E^*, $\widetilde{E}$ sei punktetrennend auf E und $\widetilde{\mathscr{T}}$ die $\widetilde{E}$-Topologie auf E. Zeigen Sie:

   a) Ist $(E, \widetilde{\mathscr{T}})$ ein metrischer Vektorraum, so besitzt $\widetilde{E}$ eine höchstens abzählbare (algebraische) Basis.

   b) Ist E ein normierter Raum und $\dim E = \infty$, so gibt es keine Metrik, die die schwache Topologie von E induziert.

   c) Ist E ein vollständiger metrischer Vektorraum, $\dim E = \infty$ und E' punktetrennend auf E, so gibt es keine Metrik, die die schwach*-Topologie von E' induziert.

4) Es sei E ein metrischer, lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Zeigen Sie:

   a) E' ist schwach*-σ-kompakt, d.h. E ist als Vereinigung abzählbar vieler schwach*-kompakter Mengen $M_n \subset E'$ darstellbar.

   b) Ist $\dim E = \infty$, so ist E' mit der schwach*-Topologie von 1. Kategorie in sich.